平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.5（11 月 19 日配付）

定義 1. 部分空間 V の**内積**とは以下の性質を満たす関数 $g : V \times V \to \mathbb{R}$ をいう。

1° $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$

2° $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c\, g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

3° $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

4° $\mathbf{x} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ 更に $\mathbf{x} \in V$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ は零ベクトル

内積が備わった部分空間を**内積空間**という.

$\mathbf{a} = {}^t(a_1 \quad \dots \quad a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \quad \dots \quad b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し次を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**標準内積**という。

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

記号 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は直積空間の元を表す記号と同一であり紛らわしいが習慣には逆らえない。

問題 1. $\mathbb{R}^n$ において標準内積を部分空間 V 上に制限して考える。このとき V は内積空間であることを確かめよ。

以下の問題で見るように $\mathbb{R}^n$ には標準内積 でない 内積もたくさん存在する。

問題 2. 実数 a, b, c が与えられ、条件 $a + c > 0$, $ac > b^2$ を満たすとする。

(1) $a > 0$, $c > 0$ であることを示せ。

(2) ${}^t(x_1 \quad x_2)$, ${}^t(y_1 \quad y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し $ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$ を対応させる関数 g は $\mathbb{R}^2$ の内積であることを示せ。

問題 3. $m \times n$ 行列 A が与えられ、その階数は $\operatorname{rank} A = n$ を満たすとする。このとき

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し $A\mathbf{x}$ と $A\mathbf{y}$ の $\mathbb{R}^m$ における標準内積 $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ を対応させる。

上の対応で決まる関数は $\mathbb{R}^n$ の内積であることを示せ。

問題 4. 部分空間 V の内積 g に対して次が成り立つことをそれぞれ示せ。

(1) $\mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{o}, \mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{x} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = 0$.

(2) $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$

(3) $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = c\, g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

記号の確認： $M(m,n,\mathbb{R})$ は $m\times n$ 実行列全体の集合を表す。

問題 5. $M(m,n,\mathbb{R})$ において $(X,Y)\mapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ は内積であることを示せ。

問題 6. $q,r,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} q\cos\alpha & -q\sin\alpha \\ q\sin\alpha & q\cos\alpha \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} r\cos\beta & -r\sin\beta \\ r\sin\beta & r\cos\beta \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathrm{tr}({}^tAA)$, $\mathrm{tr}({}^tBB)$, $\mathrm{tr}({}^tAB)$ を求めよ。

(2) $\{\mathrm{tr}({}^tAB)\}^2 \le \mathrm{tr}({}^tAA)\,\mathrm{tr}({}^tBB)$ が成り立つことを確かめよ。

約束： 1° 特に指示がない限り $\mathbb{R}^n$ においては（部分空間 V 上に制限する場合も含めて）標準内積を考える。
2° 一つ内積を固定して考える限り、（標準内積でない場合も）内積空間 V において $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ の内積を $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ で表現する。

定義 2. 内積空間 V において元 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が**直交する**とは $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ であることをいう。

問題 7. (1) $\mathbb{R}^3$ において $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は互いに直交することを確かめよ。

(2) 部分空間 $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid -x_1+2x_2+x_3=0\}$ の基底を求めよ。

問題 8. $M(2,\mathbb{R})$ において内積 $(X,Y)\mapsto \mathrm{tr}({}^tXY)$ を考える。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は互いに直交することを確かめよ。

(2) 小問 (1) で与えた行列すべてと直交する $M(2,\mathbb{R})$ の元を求めよ。

記号の再確認：$\langle \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_r\rangle := \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ の 1 次結合全体

問題 9. $\mathbb{R}^n$ の元 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ に対し行列 $(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{a}_r)$ の <u>転置</u> を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解空間を V とする。$\langle \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r\rangle$ の元と V の元は直交することを示せ。

定義 3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して $V^\perp := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \forall\mathbf{y}\in V\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=0\}$ と定め、これを V の**直交補空間**という。

問題 10. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V が与えられたとする。

(1) 直交補空間 $V^\perp$ も $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

(2) $V\cap V^\perp=\{\mathbf{o}\}$ であることを示せ。

問題 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ とする。

(1) W の基底を求めよ。 (2) $W^\perp$ の基底を求めよ。

問題 12. $\mathbb{R}^4$ の元 ${}^t(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ を $\mathbf{a}$ と表すことにする。

(1) 部分空間 $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ の次元と（次元が 0 でないときは）基底を求めよ。

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ に対し $\mathbf{x} - k\mathbf{a} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ となる実数 k を求めよ。

定義 4. 内積空間 V の元 $\mathbf{a}$ に対して、$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ と定め、これを $\mathbf{a}$ の**ノルム**という。特にノルムが 1 であるような元を**単位ベクトル**という。$\mathbf{o}$ でない元 $\mathbf{a}$ に対して（本来なら $\dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$ と書くべきだが）$\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ を $\mathbf{a}$ の**正規化**という。

問題 13. 内積空間 V において次の関係が成り立つことをそれぞれ示せ。

(1) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$, $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 4(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

(2) $\|\mathbf{a}+c\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2c\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + c^2\|\mathbf{b}\|^2$

問題 14. 内積空間 V において元 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ は互いに直交するとする。このとき

$$\|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_r\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \|\mathbf{a}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_r\|^2$$

が成り立つことを示せ。

問題 15. 内積空間 V において元 $\mathbf{a}$ と単位ベクトル $\mathbf{e}$ とが与えられたとする。

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $t \mapsto \|\mathbf{a} - t\mathbf{e}\|^2$ は最小値をもつことを示し、さらに最小値とそのときの t の値を求めよ。

(2) $|(\mathbf{a}, \mathbf{e})| \leq \|\mathbf{a}\|$ が成り立つことを示せ。等号の成立条件は $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{e} \rangle$ であることを示せ。

問題 15(2) から次の定理が読み取れる。

定理 1. 内積空間 V の元 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して不等式 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$ が成り立つ。これを**シュヴァルツの不等式**という。

注 1. 内積空間 V において $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を零ベクトルでない元とする。このときシュヴァルツの不等式により次を満たすような θ が唯一つ定まる。この θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**なす角**という.

$$0 \leq \theta \leq \pi, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

問題 16. 内積空間 V の元 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対し不等式 $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ が成り立つことを示せ。

定義 5. 内積空間 V において互いに直交する $\mathbf{o}$ でない元の組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ を**直交系**という。単位ベクトルから構成される直交系を**正規直交系**という。

問題 17. 内積空間 V において直交系 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ が与えられたとする。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立であることを示せ。

(2) $r = \dim V$ であるなら、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r$ は V の基底であることを示せ。

問題 18. 内積空間 V において元 $\mathbf{a}$ と正規直交系 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ が与えられたとする。

(1) 各 $\mathbf{e}_i$ は $\mathbf{a} - \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j$ と直交することを示せ。

(2) $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a} - \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j\|^2 + \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)^2$ が成り立つことを示せ。

問題 19. 内積空間 V において元 $\mathbf{a}$ と正規直交系 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ が与えられたとする。このとき

$$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r \rangle \Leftrightarrow \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)^2$$

が成り立つことを示せ。

定義 6. 内積空間 V において正規直交系をなす基底を**正規直交基底**という。

問題 17, 問題 18, 問題 19 を利用すると次の定理が証明できる。

定理 2. 内積空間 V には正規直交基底が存在する。**グラム-シュミットの直交化法**

グラム-シュミットの直交化法とは内積空間 V において与えられた 1 次独立系から正規直交系を構成するアルゴリズムである。

問題 20. グラム-シュミットの直交化により、次に与える組を正規直交化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

問題 21. グラム-シュミットの直交化により、次に与える組を正規直交化せよ。

(1) $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

問題 22. グラム-シュミットの直交化により、次に与える組から正規直交基底を構成せよ。

(1) $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ から $\mathbb{R}^3$ の (2) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ から $\mathbb{R}^4$ の