# 平成 20 年度 線形代数学演習 II
## プリント No.5（11 月 19 日配付）略解

**問題 1.** 省略

**問題 2.** (1) まず $b^2 \geq 0$ と $ac > b^2$ により $ac > 0$ である。これと $a + c > 0$ をあわせて $a > 0$, $c > 0$ を得る。

(2) 条件 $a(x_1)^2 + 2bx_1x_2 + c(x_2)^2 = 0$ を調べるには、$a > 0$ を使って、平方完成する。

$$a(x_1)^2 + 2bx_1x_2 + c(x_2)^2 = (\sqrt{a}x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}x_2)^2 + \frac{ac - b^2}{a}(x_2)^2$$

**問題 3.** 条件 $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$ を調べる。$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = 0$ とする。まず $\mathbb{R}^m$ における標準内積の性質により、$A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を得る。次に階数の条件 $\operatorname{rank} A = n$ は線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ の単射性と同値であるから、$\mathbf{x} = \mathbf{o}$ が導かれる。

**問題 4.** (1) $g(\mathbf{o}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{o}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{o} + \mathbf{o}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{o}, \mathbf{y})$. 他方 $g(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = g(\mathbf{o}, \mathbf{x})$.

(2) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x}) = g(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}) + g(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$

(3) $g(\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = g(c\mathbf{y}, \mathbf{x}) = c\ g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = c\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

**問題 5.** 不等式 $\operatorname{tr}({}^tXX) \geq 0$ と条件 $\operatorname{tr}({}^tXX) = 0$ を調べるには、行列 $X$ の $i$ 行 $j$ 列成分を $X_{ij}$ とすると $\operatorname{tr}({}^tXX) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} (X_{ij})^2$ であることを使えばよい。

**問題 6.** (1) $\operatorname{tr}({}^tAA) = 2q^2$, $\operatorname{tr}({}^tBB) = 2r^2$, $\operatorname{tr}({}^tAB) = 2qr\cos(\alpha - \beta)$. (2) $|\cos(\alpha - \beta)| \leq 1$.

**問題 7.** (1) 省略 (2) 例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ の組

**問題 8.** (1) 省略 (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間

**問題 9.** $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i\ (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) = 0\}$ であることと次の同値性による。

$$\forall i\ (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{y} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_r \rangle\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$$

**問題 10.** (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^\perp \Rightarrow \forall \mathbf{z} \in V\ (\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0,\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$

$\Rightarrow \forall \mathbf{z} \in V\ (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V^\perp$

他方 $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V^\perp \Rightarrow \forall \mathbf{y} \in V\ (c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow c\mathbf{x} \in V^\perp$

(2) まず $\mathbf{o} \in V$, $\mathbf{o} \in V^\perp$ である。次に $\mathbf{x} \in V \cap V^\perp$ とする。このとき $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \in V^\perp$ であるから $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ となり、内積の性質より $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を得る。

**問題 11.** (1) 例えば $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) 例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

**問題 12.** (1) 次元は 3 で、例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が基底。(2) $k = (\mathbf{x}, \mathbf{a})/4$

**問題 13.** 省略

**問題 14.** 省略

**問題 15.** (1) $\|\mathbf{a} - t\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{e})t + t^2 = (t - (\mathbf{a}, \mathbf{e}))^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{e})^2$ と平方完成することにより、最小が存在しその値は $\|\mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{e})^2$ であり、最小となるのは $t = (\mathbf{a}, \mathbf{e})$ のときのみであることが分かる。

(2) 小問 (1) で調べた関数は非負値であるから、最小値 $\|\mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{e})^2$ もそうである（書き換えると不等式 $(\mathbf{a}, \mathbf{e})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2$ を得る）。その値が 0（書き換えると等式 $(\mathbf{a}, \mathbf{e})^2 = \|\mathbf{a}\|^2$ が成り立つ）なら $t = (\mathbf{a}, \mathbf{e})$ のとき $\|\mathbf{a} - t\mathbf{e}\|^2$ は値 0 を取る。従って内積の性質より $\mathbf{a} - t\mathbf{e} = \mathbf{o}$ 即ち $\mathbf{a} = t\mathbf{e} \in \langle \mathbf{e} \rangle$ である。逆に $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{e} \rangle$ なら $(\mathbf{a}, \mathbf{e})^2 = \|\mathbf{a}\|^2$ が成り立つ。

**問題 16.** $(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 - \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と変形して右辺にシュヴァルツの不等式を適用する。

**問題 17.** (1) $(c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_i) = c_i\|\mathbf{a}_i\|^2$. (2) プリント No.2 問題 22 参照

**問題 18.** (1) 省略。(2) $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{a} - \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j$ は互いに直交し問題 14 が適用可。

**問題 19.** $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{j=1}^{r}(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)^2$ を示すには問題 18 (2) を使う。

以下スペース節約のため正規化しないままにしておく。

**問題 20.** (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

**問題 21.** (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**問題 22.** (1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$