平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.6（11 月 26 日配付）

プリント No.1 で取り上げたのは成分がすべて実数の行列である。**スカラー倍**を複素数の範囲で考えるには成分を複素数倍まで許容する。正の整数 m, n に対して

$$\boxed{M(m,n,\mathbb{C}) := m \times n \text{ 複素行列全体の集合}} \text{ 特に } \boxed{M(n,\mathbb{C}) := M(n,n,\mathbb{C})}$$

$n = 1$ なら上は m 項複素列ベクトル全体 $\mathbb{C}^m$ に他ならない。

> **確認：**行列 A の各成分をその複素共役に置き換えてできる行列を A の**複素共役**といい $\overline{A}$ で表す。また ${}^{\mathrm{t}}\overline{A}$ を A の**随伴共役**といい A^* で表す。

定義 1. **エルミート行列**とは条件 $A^* = A$ を満たす複素正方行列 A をいう。

問題 1. $M(m,n,\mathbb{C})$ の部分集合 S で以下にあげるものを考える。このとき

$$\text{“}S \neq \emptyset\text{”}, \text{“}X, Y \in S \Rightarrow X + Y \in S\text{”} \text{ かつ “}c \in \mathbb{C}, X \in S \Rightarrow cX \in S\text{”}$$

が成り立つか (1) ～ (3) についてそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

(1) $l \times m$ 行列 A を一つ固定。$S = \{X \in M(m,n,\mathbb{C}) \mid AX = l \times n \text{ 零行列}\}$

(2) $S = \{X \in M(m,n,\mathbb{C}) \mid \overline{X} = X\}$

(3) $S = \{X \in M(m,n,\mathbb{C}) \mid X^*X = n \text{ 次単位行列}\}$

定義 2. 次を 3 条件を満たす $V \subset M(m,n,\mathbb{C})$ を $M(m,n,\mathbb{C})$ の**複素部分空間**という。

$$1^\circ\ V \neq \emptyset \quad 2^\circ\ X, Y \in V \Rightarrow X + Y \in V \quad 3^\circ\ \underline{c \in \mathbb{C}},\ X \in V \Rightarrow cX \in V$$

特に $n = 1$ なら上は $\mathbb{C}^m$ の複素部分空間を定義する。

問題 2. 次は $M(n,\mathbb{C})$ の複素部分空間であるかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

(1) $\{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid {}^tX = X\}$ （n 次複素対称行列全体）

(2) $\{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid X^* = X\}$ （n 次エルミート行列全体）

(3) $\{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = 0, X^* = -X\}$

(4) n 次正方行列 A を一つ固定。$\{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$

注 1. $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 V を固定し、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in V$ とする。このとき次が成り立つ。

$$c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{C} \Rightarrow c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r \in V \ \textbf{複素 } \textit{1} \textbf{ 次結合}$$

$$\boxed{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle_{\mathbb{C}} := \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r \text{ の複素 1 次結合全体}}$$

注 2. $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r \in \mathbb{C}^n$ とする。$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間である。

定義 3. $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r \in \mathbb{C}^n$ とする。零ベクトル $\mathbf{o}$ を $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表すような複素係数は全て 0 のものに限る、即ち

$$\underline{c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{C}}, c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$$

が成り立つとき、$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ は $\mathbb{C}$ **上** *1* **次独立**であるという。

区別するためにプリント No.4 までに取り扱った概念は $\mathbb{R}$ **上** *1* **次独立**と呼ばれる。では $\mathbb{C}$ 上と $\mathbb{R}$ 上の違いは何か？混乱の可能性大だがあえて次の問題をぶつけてみよう。

問題 3. $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2+2i \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立かどうか判定し、その理由を述べよ。

(2) $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_4$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立かどうか判定し、その理由を述べよ。

(3) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$ であることを確認せよ。

問題 4. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2+i \\ 0 & 2i & 2 & 2+2i \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{C}$ 上で標準階段行列に行基本変形せよ。

(2) 問題 3 (2),(3) の結論を小問 (1) で求めた標準階段行列を使って再評価せよ。

定義 4. $\mathbb{C}^n$ の複素部分空間 V について、その**複素基底**とは次の 2 条件を満たす V の元の組 $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ をいう。

1° $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立

2° $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle_{\mathbb{C}} = V$（$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は $\mathbb{C}$ 上 V を生成する）

問題 5. $V = \{X \in M(3, \mathbb{C}) \mid {}^tX = X, \operatorname{tr} X = 0\}$ とする。

(1) V は $M(3, \mathbb{C})$ の複素部分空間であることを確かめよ。

(2) V には複素基底が存在することを示せ。

注 3. 複素部分空間についてもプリント No.4 までに取り扱った命題は然るべき形ですべて成立する（ことの真相は代数学の講義で解明されていくはず）。特に複素部分空間 V に対して複素基底を構成する元の個数が確定するのでそれを V の**複素次元**という。

$A \in M(m,n,\mathbb{C})$ が与えられたとする。このとき自然に以下の写像が誘導される。

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

これは複素線形性という性質を持つ。

定義 5. 複素部分空間 V から複素部分空間 W への写像 $f : V \to W$ について、それが**複素線形**であるとは次の 2 条件が成り立つことをいう。

$$1^\circ\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad 2^\circ\ \underline{c \in \mathbb{C}}, \mathbf{x} \in V \Rightarrow f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$$

問題 6. 次の写像は複素線形であるかそれぞれ判定し、その理由を述べよ。

(1) $M(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $X \mapsto \operatorname{tr} X$.

(2) 零ベクトルでない $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ を与えたとき $M(m,n,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^m$, $X \mapsto \overline{X}\mathbf{a}$.

(3) $M(n,\mathbb{C}) \to M(n,\mathbb{C})$, $X \mapsto X - X^*$.

問題 7. 複素線形写像 $f : V \to W$ と $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in V$ について次が成り立つことを示せ。

$$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\ \mathbb{C}\text{ 上 1 次独立} \Rightarrow \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\ \mathbb{C}\text{ 上 1 次独立}$$

問題 8. $A \in M(m,n,\mathbb{C})$ を以下のように与えて、複素線形写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ を考える。それぞれ核の複素次元および核の複素基底を一組求めよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{C}\text{ について場合分け})$$

注 4. 問題 8(1) で与えたような実行列に対しては**実線形写像**$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ も対応させることができる。見かけは同じようでも <u>定義域と値域が違う</u> ことに注意せよ。問題 8 のように複素線形写像 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を考えることを**係数の拡大**という。行列の対角化を見通し良くするには係数の拡大が必要である（ことの真相は代数学の講義で解明される）。

定義 6. 複素部分空間 V の**エルミート内積**とは以下を満たす関数 $g : V \times V \to \mathbb{C}$ をいう。

1° $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$

2° $\underline{c \in \mathbb{C}}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = cg(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

3° $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \leftarrow$ 注意！

4° $\mathbf{x} \in V \Rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ は非負実数。 更に $\mathbf{x} \in V$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}$ は零ベクトル

エルミート内積が備わった複素部分空間を**エルミート計量空間**という。

$\mathbf{a} = {}^t(a_1 \quad \dots \quad a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \quad \dots \quad b_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**標準エルミート内積**という。$\mathbb{R}^n$ における標準内積と同じ記号なので注意。

問題 9. $\mathbb{C}^n$ において標準エルミート内積を複素部分空間 V 上で考える。このとき V はエルミート計量空間であることを確かめよ。

$\mathbb{C}^n$ には標準エルミート内積でないエルミート内積もたくさん存在する。

約束：1° 特に指示がない限り $\mathbb{C}^n$ においては（複素部分空間 V 上に制限する場合も含めて）標準エルミート内積を考える。
2° 一つエルミート内積を固定して考える限り、（標準エルミート内積でない場合も）エルミート計量空間 V において $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ のエルミート内積を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ で表現する。

定義 7. エルミート計量空間 V においても元 $\mathbf{a}$ に対して、$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ と定める。

問題 10. $\mathbf{a}_1 = {}^t(i \quad 2i \quad 1)$, $\mathbf{a}_2 = {}^t(1 \quad 1+i \quad 0)$, $\mathbf{a}_3 = {}^t(i \quad 1-i \quad 2)$ とする。

(1) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\|\mathbf{a}_1\|$, $\|\mathbf{a}_2\|$, $\|\mathbf{a}_3\|$ を求めよ。

(2) ${}^t(1-i \quad -1 \quad 1-i)$ は $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ と直交することを示せ。

(3) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ と直交するベクトルを１つ求めよ。

問題 11. (1) ${}^t(x_1 \quad x_2)$, ${}^t(y_1 \quad y_2) \in \mathbb{C}^2$ に対し $x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$ を対応させる関数は $\mathbb{C}^2$ のエルミート内積であることを示せ。

(2) $\mathbf{a} = {}^t(1 \quad 2)$, $\mathbf{b} = {}^t(0 \quad i)$ とする。小問 (1) で与えたエルミート内積に関して $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ をそれぞれ求めよ。

以下 V をエルミート計量空間とする。

問題 12. V において次の関係が成り立つことをそれぞれ示せ。

(1) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$

(2) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + i\|\mathbf{a}+i\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 - i\|\mathbf{a}-i\mathbf{b}\|^2 = 4(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

(3) $\|\mathbf{a}+c\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) + |c|^2\|\mathbf{b}\|^2$

定理 1. V の元 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して不等式 $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$ が成り立つ。

定理 2. V の元 $\mathbf{a}$ と正規直交系 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ が与えられたとする。このとき次が成り立つ。

$$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r \rangle_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)|^2$$

定理 3. V には正規直交複素基底が存在する。