平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.6（11 月 26 日配付）略解

問題 1. 成り立たないものについてのみ理由を述べる。

(2) $S = \{X \in M(m,n,\mathbb{C}) \mid \overline{X} = X\}$ は $c \in \mathbb{C}, X \in S \Rightarrow cX \in S$ を満たさない。反例: すべての成分が 1 であるような行列 X に対して $X \in S$ であるが $iX \notin S$ となる。

(3) $m < n$ なら $S = \{X \in M(m,n,\mathbb{C}) \mid X^*X = E\}$ （$E = n$ 次単位行列）は空集合である。$m \geq n$ なら S は $X, Y \in S \Rightarrow X + Y \in S$ を満たさない。反例: O を $(m-n) \times n$ 零行列として $X = \begin{pmatrix} E \\ O \end{pmatrix}$ とすると $X \in S$ であるが $X + X \notin S$ となる。

問題 2. 複素部分空間でないものについてのみ理由を述べる。

(2) 複素数倍について閉じてない。$(1,1)$ 成分が 1 でその他の成分は 0 であるような n 次正方行列はエルミート行列であるが、その i 倍はエルミート行列でない。

(3) $n > 1$ なら複素数倍について閉じてない。$(1,2)$ 成分が 1, $(2,1)$ 成分が -1 でその他の成分は 0 であるような n 次正方行列は条件を満たすが、その i 倍は満たさない。

問題 3. (1) $\mathbb{R}$ 上 1 次独立である。

(2) $\mathbf{a}_1 + (-i)\mathbf{a}_2 + i\mathbf{a}_3 + (-1)\mathbf{a}_4 = \mathbf{o}$ であるから $\mathbb{C}$ 上 1 次独立でない。

(3) $\mathbb{C}^3 \subset \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle_{\mathbb{C}}$ をいえばよい。任意の ${}^t(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{x_3}{3}\mathbf{a}_1 + (ix_1 - \frac{ix_2}{2} - \frac{2ix_3}{3})\mathbf{a}_2 + (x_1 - \frac{2x_3}{3})\mathbf{a}_3 = {}^t(x_1 \quad x_2 \quad x_3).$$

問題 4. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2+i \\ 0 & 2i & 2 & 2+2i \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$

(2) 与えられた行列の $\mathbb{C}$ 上での階数は 3 である。また 1 列、2 列、3 列は $\mathbb{C}$ 上独立である。

問題 5. (1) 省略　(2) 複素基底としては以下がその例である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 6. 複素線形でないものについてのみ理由を述べる。

(2) 複素数倍について条件を満たさない。反例：零ベクトルでないので、$\mathbf{a}$ のある成分は 0 でない。その成分番号を k とする。$(1,k)$ 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるような $m \times n$ 行列を X とする。このとき $\mathbf{a}$ の k 成分 a_k は 0 でないから

$$\overline{iX}\mathbf{a} = {}^t(-ia_k \quad 0 \quad \ldots \quad 0) \neq {}^t(ia_k \quad 0 \quad \ldots \quad 0) = i\overline{X}\mathbf{a}$$

(3) 複素数倍について条件を満たさない。$(1,1)$ 成分が 1 でその他の成分は 0 であるような n 次正方行列 X に対して

$$iX - (iX)^* = 2iX \neq O = i(X - X^*)$$

問題 7. $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ の $\mathbb{C}$ 上 1 次独立性を仮定する。さて $c_1, \ldots, c_r$ が $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ の複素 1 次結合係数なら、f の複素線形性により次が成り立つ。

$$c_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_r f(\mathbf{v}_r) = f(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$$

$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立性なので $c_1, \ldots, c_r$ はすべて 0 である。

問題 8. 与えられた行列を基本変形する。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 次元は 2 で、基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & (1-a)(1+a+a^2) \end{pmatrix}$ $\omega = (-1+\sqrt{3}i)/2$ とおく。
$a \neq 1$ かつ $a \neq \omega$ かつ $a \neq \omega^2$ のとき次元 $= 0$ である。$a = 1$, $a = \omega$ または $a = \omega^2$ のとき次元 $= 1$ であり基底はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の順に与えられる。

問題 9. 省略

問題 10. (1) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 2+3i$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = i$, $\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{a}_2\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{a}_3\| = \sqrt{7}$.

(2) 省略

(3) ${}^t(5-i \quad -1 \quad 1+3i)$

問題 11. (1) $x_1\overline{x_1} - ix_1\overline{x_2} + ix_2\overline{x_1} + 3x_2\overline{x_2} = |x_1 + ix_2|^2 + 2|x_2|^2$

(2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1-6i$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$.

問題 12. 省略