平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.8（12 月 10 日配付）

今回を含めて以後のプリントでは、特に指定しない限り、スカラー倍は複素数の範囲で考える。メインテーマは固有値と固有ベクトルであるが、その前に関連する事項について複素数の範囲でまとめ直しておこう。復習にもなるので各自証明をつけてみよ。

基本事項： $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ とする。

i) A は $\mathbb{C}$ 上で標準階段行列に行基本変形できる。

ii) できた標準階段行列は基本変形の手順に依存しない。

iii) 一意的に決まる標準階段行列の階数を A の階数という。

注 1. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ とする。

i) 実行列 は標準階段行列に 実数の範囲で 行基本変形できる（線形代数学演習 I で取り扱った）。できた標準階段行列を B とする。

ii) もちろん $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ であるから、標準階段行列に複素数の範囲で行基本変形できる。できた標準階段行列を C とする。

iii) 実数の範囲で実行可能なら複素数の範囲で実行可能になるので、手順に依存しないことにより、$B = C$ が成り立つ。

以上により、実行列については $\mathbb{R}$ 上で考えた階数と $\mathbb{C}$ 上で考えた階数は一致する（ことの真相は代数学の講義で解明される）。

基本事項: $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ とそれを表現行列とする複素線形写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ について以下の $1^\circ \sim 4^\circ$ はそれぞれ同値である。

1° $\operatorname{rank} A < n$ が成り立つ。

2° A を係数行列とする同次連立 1 次方程式は $\mathbb{C}$ 上で非自明解をもつ。

3° 複素線形写像 f の核は自明でない（即ち $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{o}\}$ である）。

4° 複素線形写像 f は単射でない。

命題 2° は表現が長々しいので次の記号を導入しておこう。

記号： $\operatorname{Ker} A :=$ A を係数行列とする同次連立 1 次方程式の複素解空間

正方行列の場合は、行列式という概念が有効である。

基本事項： $A \in M(n, \mathbb{C})$ について以下の同値性が成り立つ。

$\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow |A| = 0$ （$|A|$ は行列式を表す）$\Leftrightarrow$ 正則でない

定義 1. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(1) λ に属する A の**固有ベクトル**とは条件 $\underline{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}}$ かつ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ をいう。

(2) λ に属する A の固有ベクトルが存在するような λ を A の**固有値**という。

定理 1. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。また E を n 次単位行列とする。

(i) λ が A の固有値であることは以下の 1°〜3° それぞれと同値である。

1° $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \neq \{\mathbf{o}\}$.　2° $\operatorname{rank}(A - \lambda E) < n$.
3° $|\lambda E - A| = 0$ ($\Leftrightarrow |A - \lambda E| = 0$).

(ii) λ は A の固有値であるとする。このとき λ に属する A の固有ベクトル全体の集合は $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ から $\mathbf{o}$ を取り除いたものである。

問題 1. 次のそれぞれについて行列の固有値を求めよ。また各固有値に対してそれに属する固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

問題 2. 正方行列 A に対して次の同値性を示せ。

A は正則である $\Leftrightarrow$ 0 は A の固有値でない

問題 3. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値とする。λ に属する A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ に対して次をそれぞれ示せ。

(1) $a, b, c \in \mathbb{C}$ とする。このとき $a\lambda^2 + b\lambda + c$ は $aA^2 + bA + cE$ の固有値であり、$\mathbf{x}$ は $a\lambda^2 + b\lambda + c$ に属する $aA^2 + bA + cE$ の固有ベクトルである。

(2) A は正則かつ $\lambda \neq 0$ とする。このとき $1/\lambda$ は A^{-1} の固有値であり、$\mathbf{x}$ は $1/\lambda$ に属する A^{-1} の固有ベクトルである。

(3) $\overline{\lambda}$ は $\overline{A}$ の固有値であり、$\overline{\mathbf{x}}$ は $\overline{\lambda}$ に属する $\overline{A}$ の固有ベクトルである。

問題 4. $\lambda \in \mathbb{R}$ を $A \in M(n, \mathbb{R})$ の固有値とする。このとき λ に属する A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ には $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ であるようなものが存在することを示せ。

問題 5. (1) $A^2 = E$ を満たす正方行列 A の固有値は 1 または -1 であることを示せ。

(2) $A^2 = A$ を満たす正方行列 A の固有値は 0 または 1 であることを示せ。

問題 6. (1) べき零行列とはある 1 以上の整数 r に対して A^r が零行列になるような正方行列 A をいう。べき零行列 A の固有値は 0 だけであることを示せ。

(2) $A \in M(n, \mathbb{C})$ とする。$1 \leq j \leq i \leq n$ なるすべての組 i, j について A の (i, j) 成分が 0 であるとき、行列 A の固有値は 0 だけであることを示せ。

定理 2. $A \in M(n, \mathbb{C})$ とする。

(i) 複素係数 n 次多項式 ϕ が一意に存在して $|\lambda E - A| = \phi(\lambda)$ が成り立つ。

(ii) 多項式 ϕ の n 次の係数は 1 であり、$n-1$ 次の係数は $-\operatorname{tr} A$ （A のトレースに $-$ をつけたもの）であり、また 0 次の係数は $(-1)^n|A|$ である。

定義 2. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して定理 2 で述べられている多項式 ϕ を A の**固有多項式**という（**特性多項式**ともいう）。また未知数 λ に関する方程式 $\phi(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式**という。

問題 7. 次のそれぞれについて行列の固有多項式を求めよ。また固有方程式の解を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 8. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して A の固有多項式と ${}^tA$ の固有多項式は一致することを示せ。

問題 9. P を n 次正則行列とする。$A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して A の固有多項式と $P^{-1}AP$ の固有多項式は一致することを示せ。

問題 10. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $B \in M(m, \mathbb{C})$ に対してそれらの固有多項式をそれぞれ ϕ_A, ϕ_B とする。このとき $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\phi_A\phi_B$ と因数分解されることを示せ。

定理 3. $A \in M(n, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。このとき以下の同値性が成り立つ。

λ は A の固有値である $\Leftrightarrow$ λ は A の固有方程式の解である

注 2. 任意の複素係数 n 次多項式 ϕ は複素数の範囲で n 個の 1 次式の積に因数分解される。また因数分解のされ方は因子の順番と定数倍を除いて一意的である。

定理 4. $A \in M(n, \mathbb{C})$ の <u>相異なる</u> 固有値全体を並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする。このとき A の固有多項式 ϕ は次のように因数分解される。

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(1)} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m(r)} \text{ 但し } m(1), \ldots, m(r) \text{ は 1 以上の整数}$$

定義 3. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して定理 4 で述べられている $m(1), \ldots, m(r)$ をそれぞれ固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ の**重複度**という（**多重度**ともいう）。

注 3. 定理 4 によれば任意の $A \in M(n, \mathbb{C})$ は必ず固有値を持つ。これは深遠な事実である。

問題 11. $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。

(1) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lambda_1 \cdots \lambda_n = |A|$ が成り立つことを示せ。

問題 12. $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。このとき次のそれぞれについて行列の固有値を求めよ。

(1) ${}^tA$ (2) A^{-1} ただし A は正則とする。 (3) $2A$ (4) $E - A$

定義 4. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値とする。このとき部分空間 $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ を λ に属する A の**固有空間**という。

注 4. 次元公式により $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$ が成り立つ。

問題 13. 次のそれぞれについて行列の固有値を求めよ。また各固有値に対してその重複度とそれに属する固有空間の次元を比較せよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 14. 次のそれぞれについて行列の固有値を求めよ。また各固有値に対してそれに属する固有空間の次元と基底を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

注 5. 複素線形変換 $f : V \to V$ が与えられたとする。$\lambda \in \mathbb{C}$ とする。

(1) λ に属する f の**固有ベクトル**とは条件 $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ かつ $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{x} \in V$ をいう。

(2) λ に属する f の固有ベクトルが存在するような λ を f の**固有値**という。

V の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ を一つ選び、それに関する $f : V \to V$ の表現行列を A としよう。複素線形同型写像 p を次により導入すると $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ $f(p(\mathbf{x})) = p(A\mathbf{x})$ が成り立つ。

$$p : \mathbb{C}^n \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$$

このとき、$\lambda \in \mathbb{C}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して、それぞれ次の同値性が成り立つ。

(i) $p(\mathbf{x})$ は λ に属する f の固有ベクトル $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$ は λ に属する A の固有ベクトル

(ii) λ は f の固有値 $\Leftrightarrow$ λ は A の固有値