# 平成 20 年度 線形代数学演習 II
## プリント No.8（12 月 10 日配付）略解

**問題 1.** 固有値を上段、属する固有ベクトルを下段に並べて表にする。

$$(1)\ \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\end{array} \quad (2)\ \begin{array}{c} 3 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{array} \quad (3)\ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{array} \quad (4)\ \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\end{array}$$

但し固有ベクトルについては $c$ 倍込み（$c \neq 0$）で考える。

**問題 2.** 次の対偶を考えればよい：$A$ は正則でない $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow 0$ は $A$ の固有値である

**問題 3.** (1) $A^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ であることを使う。

$$(aA^2 + bA + cE)\mathbf{x} = aA^2\mathbf{x} + bA\mathbf{x} + c\mathbf{x} = a\lambda^2\mathbf{x} + b\lambda\mathbf{x} + c\mathbf{x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathbf{x}.$$

(2) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ の両辺に $A^{-1}$ と $1/\lambda$ をかけると $\lambda^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ を得る。

(3) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ の両辺それぞれの複素共役を取ると $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$ を得る。$\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{o}$ に注意。

**問題 4.** $\lambda$ に属する $A$ の固有ベクトルの一つを $\mathbf{x}$ とする。その実部を $\mathbf{u}$, 虚部を $\mathbf{v}$ と書く。このとき $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ であるから、$\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ または $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ が成り立つ。また次も成り立つ。

$$A\mathbf{u} + iA\mathbf{v} = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + i\lambda\mathbf{v}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M(n, \mathbb{R})$ であるから、実部と虚部それぞれ比較して $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ を得る。よって $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ なら $\mathbf{u}$ が固有ベクトルであり、$\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ なら $\mathbf{v}$ が固有ベクトルである。

**問題 5.** (1) $\lambda$ を $A$ の固有値とする。それに属する $A$ の固有ベクトルの一つを $\mathbf{x}$ とする。このとき $\lambda^2\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = E\mathbf{x} = \mathbf{x}$ が成り立つ。ここで $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ であるから、$\mathbf{x}$ には 0 でない成分が存在する。その成分番号を $i$ として等式 $\lambda^2\mathbf{x} = \mathbf{x}$ の $i$ 成分を比較することにより $\lambda^2 = 1$ を得る。

(2) $\lambda$ を $A$ の固有値とすると $\lambda^2 = \lambda$ が成り立つ。その根拠は (1) のものと同様である。

**問題 6.** (1) ある 1 以上の整数 $r$ に対して $A^r$ が零行列であるとする。$\lambda$ を $A$ の固有値とすると $\lambda^r = 0$ が成り立つ。その根拠は問題 5 のものと同様である。

(2) $A^n$ は零行列である。

**問題 7.** (1) $7 - 8\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$ (2) $6 + \lambda - 4\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$
(3) $4 - 3\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$ (4) $-4 + 8\lambda - 5\lambda^2 + \lambda^3 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

**問題 8.** 転置をとっても行列式は変わらないので $|\lambda E - {}^tA| = |{}^t(\lambda E - A)| = |\lambda E - A|$

**問題 9.** 行列の積と行列式に関する公式により $|\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |\lambda E - A|$

**問題 10.** 前期プリント No.9 問題 21 で取り扱った公式を適用する。

$$\begin{vmatrix} \lambda E - A & -C \\ O & \lambda E - B \end{vmatrix} = |\lambda E - A|\,|\lambda E - B|$$

**問題 11.** $A$ の固有多項式 $\phi$ は次のように因数分解される。

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

よって $\phi$ の $n-1$ 次の係数は $-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ であり 0 次の係数は $(-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$ である。

**問題 12.** (1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (2) ${\lambda_1}^{-1}, {\lambda_2}^{-1}, \ldots, {\lambda_n}^{-1}$ (3) $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_n$
(4) $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \ldots, 1-\lambda_n$

**問題 13.** $A$ を与えられた行列として $A - \lambda E$ を基本変形すればよい。固有値を上段、重複度を中段、属する固有空間の次元を下段に並べて表にする。

(1) $\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - \lambda/2 \\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+2) \end{pmatrix}$ より $\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$

(2) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda/2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix}$ より $\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$

(3) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$ より $\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$

**問題 14.** 固有値を上段、属する固有空間の基底を下段に並べて表にする。次元については自明なので省略する。また基底の取り方は他にもある。

(1) $\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$ (2) $\begin{array}{cc} 1+\sqrt{2}i & 1-\sqrt{2}i \\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix} \end{array}$ (3) $\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$

(4) $\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$