# 平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

**プリント No.9**（1 月 14 日配付）

今回のプリントでも、特に指定しない限り、スカラー倍は複素数の範囲で考える。また $E$ は $n$ 次単位行列（次数 $n$ はその場に応じて適切に選ぶ）を表すことにする。

**問題 1.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ または $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $A$ の固有値は 2 個あり、両方とも実数でありまた重複度は 1 であることを確かめよ。固有値を小さいほうから $\lambda_1$, $\lambda_2$ とする。

(2) $\lambda_1$, $\lambda_2$ に属する固有空間はそれぞれ 1 次元であることを確かめよ。それぞれの基底を一つ選び $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ とせよ。

(3) $P = (\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2)$, $Q = (\mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_1)$ とおくとき、$P$, $Q$ は共に正則行列であることを確かめ、更に $P^{-1}AP$, $Q^{-1}AQ$ を求めよ。

**問題 2.** $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ を $A \in M(n, \mathbb{C})$ の相異なる固有値とする。次をそれぞれ示せ。

(1) $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)$ なら $(A - \lambda_2 E) \cdots (A - \lambda_r E)\mathbf{x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_r)\mathbf{x}$ である。

(2) $2 \leq i \leq r$ かつ $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_i E)$ なら $(A - \lambda_2 E) \cdots (A - \lambda_r E)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ である。

(3) 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し $\mathbf{v}_i \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_i E)$ とする。このとき $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r = \mathbf{o}$ なら全ての $i$ に対して $\mathbf{v}_i = \mathbf{o}$ である。

問題 2(3) で述べた事実を使うと次の定理が証明できる。

**定理 1.** $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ を $A \in M(n, \mathbb{C})$ の相異なる固有値とする。

- 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し組 $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{id(i)} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_i E)$ が 1 次独立であるなら、組 $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \ldots, \mathbf{v}_{1d(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{r1}, \mathbf{v}_{r2}, \ldots, \mathbf{v}_{rd(r)}$ も 1 次独立である。
- 特に、各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し $\mathbf{v}_i$ が $\lambda_i$ に属する $A$ の固有ベクトルであるなら、組 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ は 1 次独立である。

**問題 3.** 定理 1 を示せ。

**問題 4.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値についてすべて重複度 1 であるとする。次をそれぞれ示せ。

(1) $A$ の固有ベクトルのみを列ブロックとする $n$ 次正則行列 $(\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n)$ が存在する。

(2) 行列 $P$ を (1) で述べたものの一つとする。このとき $P^{-1}AP$ は対角行列である。

**問題 5.** 次のそれぞれについて行列の固有値とその重複度を求めよ。さらに問題 4 の手順で対角化できることを確かめよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**問題 6.** $\alpha \in \mathbb{C}$ を $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値とする。また組 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathrm{Ker}(A - \alpha E)$ は 1 次独立であるとする。次をそれぞれ示せ。

(1) ブロック分けが $(\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_r \quad *)$ という形の $n$ 次正則行列 $P$ が存在する。

(2) 行列 $P$ を (1) で述べたものの一つとする。このとき次が成り立つ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha E_r & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ ここで } E_r \text{ は } r \text{ 次単位行列 } O \text{ は } (n-r) \times r \text{ 零行列}$$

(3) 行列 $C$ を (2) で述べたものとする。このとき $A$ の固有多項式は $(\lambda - \alpha)^r$ と $C$ の固有多項式の積である。従って固有値 $\alpha$ の重複度は $r$ 以上である。

問題 6(3) で述べた事実を使うと次の定理が証明できる。

**定理 2.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の <u>相異なる</u> 固有値全体を並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし、それぞれの重複度を $m(1), \ldots, m(r)$ とする。このとき次の関係が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) \leq m(1), \ldots, \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_r E) \leq m(r)$$

**問題 7.** 定理 2 を示せ。

**定理 3.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して以下の $1^\circ \sim 3^\circ$ は同値である。

$1^\circ$ 固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき、次の形に対角化する $n$ 次正則行列 $P$ が存在する。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$2^\circ$ 固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ から構成される $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する。

$3^\circ$ <u>相異なる</u> 固有値全体を並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし、各 $\lambda_i$ の重複度を $m(i)$ とするとき、次の関係が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = m(1), \ldots, \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_r E) = m(r)$$

**問題 8.** 定理 3 を示せ。

**問題 9.** 次のそれぞれについて対角化可能性を判定し、対角化可能なら対角化する正則行列を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**問題 10.** $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ とする。同一の $n$ 次正則行列 $P$ によって $A$, $B$ が共に対角化されるなら $AB = BA$ が成り立つことを示せ。

**問題 11.** $\lambda \in \mathbb{C}$ と 1 以上の整数 $n$ に対して、$\lambda$ のみを固有値とする $n$ 次正方行列 $A$ であって $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E) = 1$ を満たすようなものの例を挙げよ。

問題 6 を解くときに使う考えをもとにして次の定理が証明できる。

**定理 4.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。このとき次の形に三角化する $n$ 次正則行列 $P$ が存在する。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**定義 1.** 定理 4 で述べられているような形を持つ正方行列を**上三角行列**という。

**問題 12.** 定理 4 を示せ。

**問題 13.** 次のそれぞれについて行列の固有値と三角化する正則行列を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**問題 14.** 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $A_i$ は上三角行列であり、その $i$ 行 $i$ 列成分は 0 とする。

(1) 積 $A_1A_2$ の第 1 列と第 2 列は零ベクトルであることを確かめよ。

(2) 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し積 $A_1 \cdots A_k$ はどのような特徴を持つか。

(3) 積 $A_1 \cdots A_n$ は零行列であることを示せ。

**問題 15.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ がべき零行列であることは $A$ の固有値が 0 のみであることと同値である。これを示せ。ヒント：プリント No.8 の問題 6 と定理 4

定理 4 と問題 14(3) で述べた事実を使うと次の定理が証明できる。

**定理 5.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。このとき積 $(A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_n E)$ は零行列である。

**問題 16.** 定理 5 を示せ。

**定義 2.** $x$ を変数とする複素係数 $m$ 次多項式 $\phi$ が与えられたとする。

$$\phi = c_0 x^m + \cdots + c_{m-1} x + c_m \text{ 但し } c_0 \neq 0$$

$A \in M(n, \mathbb{C})$ が与えられたとき**正方行列 $A$ の多項式 $\phi$ への代入**$\phi(A)$ を次で定義する。

$$\phi(A) = c_0 A^m + \cdots + c_{m-1} A + c_m E \in M(n, \mathbb{C})$$

**問題 17.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有多項式を $\phi$ とする。このとき $A$ の $\phi$ への代入 $\phi(A)$ は零行列であること（Hamilton-Cayley の定理）を示せ。

**問題 18.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ に対し $A^4 + A^3 - 7A^2 + 2A + 8E$ を求めよ。

**問題 19.** $A \in M(n, \mathbb{C})$ の固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。多項式 $\phi$ に対して行列 $\phi(A)$ の固有値全体は重複度こみで $\phi(\lambda_1), \ldots, \phi(\lambda_n)$ で与えられること（Frobenius の定理）を示せ。ヒント：定理 4

**問題 20.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -17 & -89 \\ 1 & 12 & 41 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 行列 $A^3 - 12A^2 + 48A - 62E$ の固有値を求めよ。

(2) $A$ は正則行列であることを確かめ、さらに $A^{-1}$ の固有値を求めよ。