平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.9（1 月 14 日配付）略解

問題 1. A, λ_1, $\mathbf{p}_1$, λ_2, $\mathbf{p}_2$ の順に並べて表にする。基底は定数倍も許される。

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad 5, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 9, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad -2, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 5, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題 2. (1) 各 i に対して $(A-\lambda_i E)\mathbf{x} = (\lambda_1 - \lambda_i)\mathbf{x}$ である。

(2) $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)$ より $(A-\lambda_i E)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ である。

(3) 等式 $\mathbf{o} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r$ の両辺に左から行列 $(A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_r E)$ をかけると

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= (A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_r E)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r) \\ &= (A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_r E)\mathbf{v}_1 + (A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_r E)\mathbf{v}_2 + \\ &\qquad \cdots + (A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_r E)\mathbf{v}_r. \end{aligned}$$

右辺第 1 項は (1) より $(\lambda_1-\lambda_2)\cdots(\lambda_1-\lambda_r)\mathbf{v}_1$ に等しく第 2 項以下は (2) より $\mathbf{o}$ である。また $(\lambda_1-\lambda_2)\cdots(\lambda_1-\lambda_r) \neq 0$ なので $\mathbf{o} = \mathbf{v}_1$ を得る。同様の議論を繰り返すことにより $i = 2, \ldots, r$ に対しても $\mathbf{v}_i = \mathbf{o}$ であることが分かる。

問題 3. $\mathbf{o}$ を表す 1 次結合係数を $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1d(1)}, \ldots, c_{r1}, c_{r2}, \ldots, c_{rd(r)}$ とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \underbrace{c_{11}\mathbf{v}_{11} + c_{12}\mathbf{v}_{12} + \cdots + c_{1d(1)}\mathbf{v}_{1d(1)}}_{\mathbf{u}_1} + \cdots + \underbrace{c_{r1}\mathbf{v}_{r1} + c_{r1}\mathbf{v}_{r2} + \cdots + c_{rd(r)}\mathbf{v}_{rd(r)}}_{\mathbf{u}_r} \\ &= \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_r \end{aligned}$$

このとき $\mathbf{u}_i \in \mathrm{Ker}(A-\lambda_i E)$ となるので、問題 2(3) を適用すると、すべての i に対して $\mathbf{u}_i = \mathbf{o}$ が得られる。各 i を固定して考える。次が成り立つ。

$$c_{i1}\mathbf{v}_{i1} + c_{i2}\mathbf{v}_{i2} + \cdots + c_{id(i)}\mathbf{v}_{id(i)} = \mathbf{o}$$

組 $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \ldots, \mathbf{v}_{id(i)}$ の 1 次独立性より $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{id(i)}$ はすべて 0 である。

問題 4. A の <u>相異なる</u> 固有値全体を並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする。固有多項式の次数は n である。従ってプリント No.8 定理 4 と本問の仮定により $r = n$ であることが分かる。各 $i = 1, \ldots, n$ に対して λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ を選んでおく。

(1) 定理 1 により組 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立である。よって n 次正方行列 $P := (\mathbf{v}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{v}_n)$ の階数は n であるから、正則行列となる。これが求めるものである。

(2) 条件 $P^{-1}P = E$（n 次単位行列）は別の表現で $P^{-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \ldots, P^{-1}\mathbf{v}_n = \mathbf{e}_n$ と書ける。ここで $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底である。以上に注意すると $P^{-1}AP$ は

$$(P^{-1}A\mathbf{v}_1 \ \ \ldots \ \ P^{-1}A\mathbf{v}_n) = (P^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ \ldots \ \ P^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n) = (\lambda_1\mathbf{e}_1 \ \ \ldots \ \ \lambda_n\mathbf{e}_n)$$

に一致する。もちろん $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ であることも使っている。

問題 5. 固有値を上段、属する固有ベクトル（定数倍は許容）を下段に並べて表にする。

$$(1)\ \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{array} \quad (2)\ \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{array} \quad (3)\ \begin{array}{ccc} 2 & 3+\sqrt{11}i & 3-\sqrt{11}i \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1-\sqrt{11}i\\0\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+\sqrt{11}i\\0\\-2\end{pmatrix}\end{array}$$

問題 6. (1) プリント No.2 の定理 6（の複素数版）によれば、いくつか $\mathbb{C}^n$ の元 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ を付加して組 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底であるようにすることができる。ここで次のブロック分けを持つ行列 P を考える。

$$P = (\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_r \quad \mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{u}_{n-r})$$

その階数は n であるから P は正則行列である。P が求めるものである。

(2) 条件 $P^{-1}P = E$（n 次単位行列）は別の表現で

$$(P^{-1}\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}\mathbf{v}_r \quad P^{-1}\mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}\mathbf{u}_{n-r}) = (\mathbf{e}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_{r+1} \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n)$$

と書ける。ここで $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底である。以上に注意すると

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= (P^{-1}A\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}A\mathbf{v}_r \quad P^{-1}A\mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}A\mathbf{u}_{n-r}) \\ &= (P^{-1}\alpha\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}\alpha\mathbf{v}_r \quad *) = (\alpha\mathbf{e}_1 \quad \ldots \quad \alpha\mathbf{e}_r \quad *) = \begin{pmatrix}\alpha E_r & B \\ O & C\end{pmatrix} \end{aligned}$$

もちろん $A\mathbf{v}_i = \alpha\mathbf{v}_i$ であることも使っている。

(3) プリント No.8 の問題 9 によれば、A の固有多項式は $P^{-1}AP$ のそれと同じである。他方、プリント No.8 の問題 10 によれば、$\begin{pmatrix}\alpha E_r & B \\ O & C\end{pmatrix}$ の固有多項式は αE_r の固有多項式と C の固有多項式の積に等しい。更に αE_r の固有多項式は $(\lambda-\alpha)^r$ である。故に A の固有多項式は $(\lambda-\alpha)^r$ と C の固有多項式の積である。よって A の固有多項式を因数分解するとき、$\lambda-\alpha$ という因子の多重度は r 以上である。

問題 7. 省略

問題 8. 省略

問題 9. 固有値と重複度を上段、属する固有空間の基底の例を下段に並べて表にする。

$$(1)\ \begin{array}{c} 1,2 \\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{array} \quad (2)\ \begin{array}{cc} -2,2 & 4,1 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\end{array} \quad (3)\ \begin{array}{cc} 2,2 & 3,1 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\end{array} \quad (4)\ \begin{array}{cc} 1,2 & 2,1 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

よって (2),(3) は対角化可能で (1),(4) は不可能である。

問題 10. 対角行列相互は可換であるから。

問題 11. 対角成分はすべて λ であり、$i = 1, \ldots, n-1$ に対して i 行 $i+1$ 列成分は 1 であり、それ以外の成分は 0 であるような n 次正方行列が例である。

問題 12. 同一型 $\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix}$ のブロック分けを持つ正方行列相互の積について次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ O & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' + BC' \\ O & CC' \end{pmatrix} \text{ 但し } A,\, A',\, C,\, C' \text{ は正方行列}$$

これと問題 6 の解答例に述べた考えを考慮に入れて帰納法を適用すればよい。

問題 13. 固有値と重複度を上段、属する固有空間の基底の例を下段に並べて表にする。

$$(1)\ \begin{array}{ccc} 1,2 & & 2,1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 11/26 \\ -1/26 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{ccc} 1,2 & & 2,1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

表 $\begin{array}{cc} \lambda, 2 & \\ \mathbf{v} & \mathbf{u} \end{array}$ において $\mathbf{u}$ は $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}$ の解の一つ（一般化固有ベクトルという）である。

表にある列ベクトルから構成される行列 P によりいずれも $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と三角化される。

問題 14. 省略

問題 15. プリント No.8 の問題 6(1) によればべき零行列の固有値は 0 のみである。逆に A の固有値が 0 のみであると仮定する。定理 4 によれば、正則行列 P を選ぶと、$P^{-1}AP$ は上三角行列でありしかもその対角成分がすべて 0 であるようにできる。このとき $(P^{-1}AP)^n$ は零行列である（問題 14 参照）。さて $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ であるから、A^n が零行列であることを得る。

問題 16. 定理 4 によれば、正則行列 P を選ぶと、$P^{-1}AP$ は上三角行列でありしかもその対角成分が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ であるようにできる。このとき各 $P^{-1}AP - \lambda_i E$ は上三角行列であり、その i 行 i 列成分は 0 である。よって問題 14(3) を適用して積

$$(P^{-1}AP - \lambda_1 E) \cdots (P^{-1}AP - \lambda_n E)$$

が零行列であることを得る。上は $P^{-1}(A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_n E)P$ に等しい。

問題 17. A の固有値全体を重複度こみで並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。このときプリント No.8 定理 4 によれば固有多項式は $\phi = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ と因数分解される。よって $\phi(A) = (A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_n E)$ が成り立つ。定理 5 によればこれは零行列である。

問題 18. A の固有多項式は x^3-7x+6 である。従って問題 17 により $A^3-7A+6E=O$ が成り立つ。また $x^4+x^3-7x^2+2x+8=(x^3-7x+6)(x+1)+3x+2$ である。よって

$$A^4+A^3-7A^2+2A+8E=3A+2E=\begin{pmatrix}11 & -6 & -9\\ 0 & 8 & 0\\ 12 & 21 & -13\end{pmatrix}$$

問題 19. 省略

問題 20. (1) A の固有値は 3, 4, 5 であり、重複度はすべて 1 である。ここで多項式 $x^3-12x^2+48x-62$ に 3, 4, 5 を代入すると 1, 2, 3 を得る。従って問題 19 により行列 $A^3-12A^2+48A-62E$ の固有値は 1, 2, 3 であり、重複度はすべて 1 である。

(2) 0 は A の固有値ではない。従って A は正則であり、A^{-1} の固有値は $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ であり、重複度はすべて 1 である。