平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.10（1 月 21 日配付）

今回のプリントでは、特に指定しない限り、スカラー倍は実数の範囲で考える。また E は n 次単位行列（次数 n はその場に応じて適切に選ぶ）を表すことにする。複素数の範囲で考えていた場合と区別するために次の記号を導入する。

記号： $\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}\, A :=$ 実行列 A を係数行列とする同次連立 1 次方程式の実解空間

プリント No.8 問題 4 で扱った様に次が成り立つ：

復習： $\lambda \in \mathbb{R}$ が $A \in M(n, \mathbb{R})$ の固有値であるとする。このとき λ に属する A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ には $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を満たすものが存在する。

従って $\lambda \in \mathbb{R}$ が $A \in M(n, \mathbb{R})$ の固有値なら $\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E)$ は自明でない。

問題 1. n 次実対称行列 A に対して次をそれぞれ示せ。

(1) A の固有値は実数だけである。

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が A の相異なる固有値なら $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda_1 E)$ と $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda_2 E)$ は標準内積に関して直交する。

(3) $\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値なら $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E)^{\perp} \Rightarrow A\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E)^{\perp}$ が成り立つ。

(4) $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ とする。$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が λ に属する A の固有ベクトルであり、$\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^{\perp}$ を満たすなら $\lambda \neq \alpha$ が成り立つ。

問題 2. $1 \leq r \leq n-1$ なる整数 r, $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ を列ブロックとする正則行列 P および $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して次の同値性を示せ：

$$\mathbf{v} \in \langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{v} \text{ の第 1 成分から第 } r \text{ 成分までは 0 である}$$

問題 3. V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間であり、$V \neq \{\mathbf{o}\}$ かつ $V \neq \mathbb{R}^n$ とする。次をそれぞれ示せ。

(1) V の正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r$ が与えられたとき、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ を選んで各 $i = 1, \ldots, r$ に対して $\mathbf{p}_i = \mathbf{v}_i$ を満たすようにできる。

(2) $r = \dim V$ とする。$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ に対して $\langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_r \rangle = V$ が成り立つなら、$\langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle = V^{\perp}$ も成り立つ。

復習： $P = (\mathbf{p}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{p}_n) \in M(n, \mathbb{R})$ について次の同値性が成り立つ：

$$P \text{ は直交行列である} \Leftrightarrow \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系である}$$

プリント No.7 問題 4 参照

問題 4. $\alpha \in \mathbb{R}$ を n 次実対称行列 A の固有値とする。また組 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ は $\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)$ の正規直交基底であるとする。次をそれぞれ示せ。

(1) ブロック分けが $(\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_r \quad *)$ という形の n 次直交行列 P が存在する。

(2) 行列 P を (1) で述べたものの一つとする。このとき次が成り立つ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha E_r & O \\ O & A' \end{pmatrix} \text{ ここで } E_r \text{ は } r \text{ 次単位行列 } A' \text{ は } n-r \text{ 次実対称行列}$$

ただし $r = n$ のときは右辺は αE_r を意味する。

(3) $r < n$ とする。このとき α は (2) で述べた行列 A' の固有値でない。

(4) 固有値 α の重複度は r に等しい。

問題 4 で述べた事実を使うと次の定理が証明できる。

定理 1. n 次実対称行列 A に対して以下の $1^\circ \sim 3^\circ$ が成り立つ。

1° 固有値全体を <u>重複度こみで</u> 並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき、それらはすべて実数であり、さらに次の形に対角化する n 次直交行列 P が存在する。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2° 固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ から構成される $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が存在する。

3° <u>相異なる</u> 固有値全体を並べたものを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし、各 λ_i の重複度を $m(i)$ とするとき、次の関係が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E) = m(1), \ldots, \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_r E) = m(r)$$

問題 5. 定理 1 を示せ。

問題 6. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を相異なる実数、$m(1), m(2), \ldots, m(r)$ を 1 以上の整数とし、$n = m(1) + m(2) + \cdots + m(r)$ とおく。このとき n 次正方行列 A が行列

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m(1)} & & & 0 \\ & \lambda_2 E_{m(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r E_{m(r)} \end{pmatrix}$$

と可換となるための条件を求めよ。

問題 7. A, B を n 次実対称行列とする。$AB = BA$ が成り立つなら、同一の n 次直交行列 P によって A, B が共に対角化されること（これを**同時対角化可能**という）を示せ。