平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.10（1 月 21 日配付）略解

問題 1. (1) $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とし、$\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする。標準エルミート内積の諸性質とプリント No.7 問題 20(1) で述べた関係を使う。その際 $A^* = A$ であることに注意する。変形は以下の通りである。

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ なので、$\lambda = \overline{\lambda}$ が成り立ち、従って λ は実数である。

(2) 以後はすべて実数の範囲で考察する。標準内積の諸性質とプリント No.7 問題 10(1) で述べた関係を使う。その際 ${}^{\mathrm{t}}A = A$ に注意する。変形は以下の通りである。

$$\lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda_1\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \lambda_2\mathbf{v}) = \lambda_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ なので、$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つ。

(3) 再びプリント No.7 問題 10(1) で述べた関係、${}^{\mathrm{t}}A = A$ であることおよび標準内積の性質を使う。任意の $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E)$ に対して以下の通り変形できる。

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, A\mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \because \mathbf{v} \text{ は } \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \lambda E) \text{ の元と直交}$$

(4) 背理法で証明する。$\lambda = \alpha$ であるとしよう。すると $\mathbf{v}$ は $\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)$ にも属し、$\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^{\perp}$ にも属することになる。プリント No.5 問題 10(2) によれば、そのような $\mathbf{v}$ は $\mathbf{o}$ のみである。これは固有ベクトルであることの条件 $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ に矛盾する。

問題 2. 基底 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ に関する $\mathbf{v}$ の座標を $c_1, \cdots, c_n$ と書こう。条件 $P^{-1}P = E$ は別の表現で $P^{-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \ldots, P^{-1}\mathbf{v}_n = \mathbf{e}_n$ と書ける（$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底）。従って

$$P^{-1}\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

となる。他方、座標の一意性により、次の同値性が成り立つ：

$$\mathbf{v} \in \langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle \Leftrightarrow \text{各 } i \leq r \text{ に対して } c_i = 0 \text{ が成り立つ}$$

右にある条件は $P^{-1}\mathbf{v}$ の第 1 成分から第 r 成分までが 0 であることを意味する。

問題 3. (1) プリント No.7 定理 1 によれば、次に述べる直交分解が成り立つ：

$$\text{各 } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対し } \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x} \text{ を満たす } \mathbf{y} \in V \text{ と } \mathbf{z} \in V^\perp \text{ が一意に存在。}$$

特に次が分かる：$V \neq \mathbb{R}^n$ なので、$V^\perp \neq \{\mathbf{o}\}$ も成り立つ。プリント No.5 定理 2 によれば部分空間 $V^\perp$ は正規直交基底をもつ。それを $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_s$ とする。このとき組 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_s$ は再び正規直交系であり、従って 1 次独立となる。これを $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_{r+s}$ と表そう。さて直交分解定理より各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は V の元 $\mathbf{y}$ と $V^\perp$ の元 $\mathbf{z}$ の和でかけ、更に $\mathbf{y}$ は $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_r$ の 1 次結合、$\mathbf{z}$ は $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_s$ の 1 次結合である。よって各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_{r+s}$ の 1 次結合で表せる。以上より組 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_{r+s}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となり (従って $r + s = n$)、これが求めるものである。

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ とする。基底 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ に関する $\mathbf{x}$ の座標 $c_1, \cdots, c_n$ は、プリント No.5 問題 19 によれば、$c_i = (\mathbf{x}, \mathbf{p}_i)$ と与えられる。よって

$$\mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle \Leftrightarrow \text{各 } i \leq r \text{ に対して } (\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) = 0 \text{ が成り立つ}$$

という同値性を得る。右にある条件は次と同値である。

$$\text{各 } \mathbf{v} \in \langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_r \rangle \text{ に対して } (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 \text{ が成り立つ}$$

他方 $\langle \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_r \rangle = V$ と仮定しているので、上は $\mathbf{x} \in V^\perp$ を意味する。従って

$$\mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle \Leftrightarrow \mathbf{x} \in V^\perp$$

という同値性を得るので、$\langle \mathbf{p}_{r+1}, \cdots, \mathbf{p}_n \rangle = V^\perp$ が成り立つ。

問題 4. (1) 問題 3(1) によれば、いくつか $\mathbb{R}^n$ の元 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ を付加して $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-r}$ を構成できる。次のブロック分けを持つ行列

$$P = (\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_r \quad \mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{u}_{n-r})$$

は n 次直交行列である。これが求めるものである。

(2) 条件 $P^{-1}P = E$（n 次単位行列）は別の表現で次のように書ける：

$$(P^{-1}\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}\mathbf{v}_r \quad P^{-1}\mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}\mathbf{u}_{n-r}) = (\mathbf{e}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_{r+1} \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n)$$

ここで $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底である。さて $A\mathbf{v}_i = \alpha\mathbf{v}_i$ であるから、

$$\text{各 } i \leq r \text{ に対して } P^{-1}A\mathbf{v}_i = \alpha\mathbf{e}_i \text{ が成り立つ}$$

他方、問題 3(2) によれば、次が成り立つ：

$$\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-r} \rangle = \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^\perp$$

$i = 1, \ldots, n-r$ とする。$\mathbf{u}_i \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^{\perp}$ であるから、問題 1(3) により、

$$A\mathbf{u}_i \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^{\perp} = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-r} \rangle$$

であり、さらに問題 2 を適用して、$P^{-1}A\mathbf{u}_i$ の第 1 成分から第 r 成分までは 0 であることが分かる。以上に注意すると次のように変形できる：

$$P^{-1}AP = (P^{-1}A\mathbf{v}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}A\mathbf{v}_r \quad P^{-1}A\mathbf{u}_1 \quad \ldots \quad P^{-1}A\mathbf{u}_{n-r}) = \begin{pmatrix} \alpha E_r & O \\ O & A' \end{pmatrix}$$

ここで $P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}P$ であるから、$P^{-1}AP$ も実対称行列である。従って右下に現れるブロック A' も実対称行列である

(3) λ を A' の固有値とする。λ は実数であり、λ に属する A' の固有ベクトル $\mathbf{u}$ は $\mathbb{R}^{n-r}$ から選べる。このとき $P\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は λ に属する A の固有ベクトルである。また問題 2 により、それは $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-r} \rangle = \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}}(A - \alpha E)^{\perp}$ に属する。従って問題 1(4) を適用して $\lambda \neq \alpha$ であることが分かる。故に α は A' の固有値でない。

(4) プリント No.8 の問題 9 によれば、A の固有多項式は $P^{-1}AP$ のそれと同じである。他方、プリント No.8 の問題 10 によれば、$\begin{pmatrix} \alpha E_r & O \\ O & A' \end{pmatrix}$ の固有多項式は αE_r の固有多項式と A' の固有多項式の積に等しい。更に αE_r の固有多項式は $(\lambda - \alpha)^r$ である。故に A の固有多項式は $(\lambda - \alpha)^r$ と A' の固有多項式の積である。さて (3) で見たように、α は A' の固有値でない。従って A' の固有多項式を因数分解するとき、$\lambda - \alpha$ という因子は現れない。よって固有値 α の重複度は r に等しい。

問題 5. 省略。

問題 6. 省略。

問題 7. 省略。