

# 有限時間で零速度に収束する不連続摩擦モデル

○菊植 亮, 武居 直行, 佐野 明人, 望山 洋, 藤本 英雄 (名古屋工業大学)

## Discontinuous Friction Model with Finite-Time Convergence to Zero-Velocity

\*Ryo Kikuuwe, Naoyuki Takesue, Akihito Sano, Hiromi Mochiyama,  
and Hideo Fujimoto (Nagoya Institute of Technology)

**Abstract**—This paper proposes a new regularization of discontinuous friction models, such as the Coulomb friction model, for the purpose of constant-step discrete-time numerical simulations. In this method, the friction force is determined so that the velocity reaches zero in finite time. This method is dependent on the mass and the sampling interval, and does not include arbitrariness in the threshold setting, which is included in Karnopp's model. This regularization method can be applied to discontinuous models with arbitrary force-velocity relations. Its generalization to multidimensional representation is straightforward. Results of simple numerical simulations are presented.

**Key Words:** friction model, stick-slip, finite-time convergence

### 1. 緒言

摩擦は全ての機械システムと日常生活の全てのものに存在する。摩擦のモデル化は、機械システムのモデルベース制御やシミュレーションのために、また、力覚提示装置を介したリアルな力覚提示のために重要な課題である。摩擦力は特に零速度近傍において非線形であり、このことが摩擦現象の離散時間シミュレーションを困難なものにしている。

摩擦の数値計算モデルは多くの研究者によって提案されている [1, 2]。これらのモデルは主に、不連続なモデルと連続なモデルの2つに分類できる。不連続なモデルにおける摩擦力の定義は速度に対して不連続であり、速度が0のときの摩擦力は他の力と釣り合って速度を0に保つように働く。連続なモデルでは、固着領域における微小な弾性変位が考慮に入れられている [3–7]。連続摩擦モデルは接触面の微視的な力学に基づいているため、容易には観測できないパラメータを必要とする。それに対し、不連続なモデルは容易に観測できるパラメータのみに依存するため、簡単な実装が可能である。不連続摩擦モデルは、無限に高速な微視的応答を持つ連続摩擦モデルの近似モデルとして考えられることが示されている [8]。

不連続摩擦モデルに基づいて摩擦現象の離散時間シミュレーションを行うためには、零速度状態と非零速度状態の切り替えや速度・力関係の平滑化などの正則化 (regularization) が必要である。従来は、速度にある閾値を設け、その閾値以下の速度は零速度状態として扱う方法が一般的であった。この手法は単純であるために広く用いられているが [9, 10]、モデルの振舞いが閾値の選び方に強く影響される [10]。またこのモデルでは、外力が無い状態でも速度が有限時間内に0へ到達しない。ゼロ交差検出に基づいた有限状態機械を用いる方法も提案されているが [8]、一定サンプリング時間で多次元へ拡張するのは困難である。

本論文では、不連続摩擦モデルの離散時間シミュレーションのための新しい正則化の手法を提案する。提案手

法では、慣性質量とサンプリング時間が与えられれば、速度が有限時間内に0へ到達するように摩擦力が決定される。提案手法は閾値設定の任意性を含まない。また、一定サンプリング時間での実装が可能であるので、リアルタイムの制御系にも適用できる。さらに、多次元表現への一般化も容易であり、Stribeck 効果や粘性摩擦など、速度に依存する摩擦力も容易に実現できる。

### 2. 摩擦モデル

#### 2.1 不連続摩擦モデル

Fig. 1 のように、物体が固定面と接触し、その面に対して速度  $v$  で移動しているとする。一般に不連続摩擦モデルでは、摩擦力  $f$  は以下のように表される。

$$f(v, h) = \begin{cases} -h & \text{if } v = 0 \wedge |h| \leq F_S \\ -\text{sgn}(h)F_S & \text{if } v = 0 \wedge |h| > F_S \\ \phi(v) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $h$  は物体にかかる外力全ての合力である。 $F_S > 0$  は最大静止摩擦力であり、 $\phi(v)$  は全ての  $v \neq 0$  において、 $\phi(v)v \leq 0$  を満たす任意の関数である。 $v \rightarrow +0$  および  $v \rightarrow -0$  において  $\phi(v)$  は極限を持つと仮定する。物体の運動方程式は、

$$M\dot{v} = h + f(v, h) \quad (2)$$

となる。ここで、 $M$  は物体の慣性質量である。

Fig. 2 は、式 (1) で表現できる不連続摩擦モデルの例を示す。最も単純な摩擦モデルは Fig. 2(a) で表されるクーロン摩擦モデルである。これは式 (1) を次式で特殊化することによって得られる。

$$\phi(v) = -\text{sgn}(v)F_C, \quad F_S = F_C \quad (3)$$

ここで、 $F_C$  はいわゆる動摩擦力である。ただし、通常の乾き摩擦では、Fig. 2(b) のように、最大静止摩擦力  $F_S$  は  $F_C$  よりも大きい。このときの  $\phi(v)$  および  $F_S$  は次式のようになる。

$$\phi(v) = -\text{sgn}(v)F_C, \quad F_S > F_C \quad (4)$$

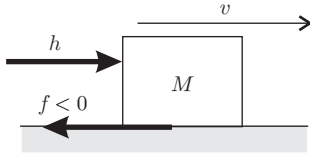


Fig. 1 Friction between a mobile object and a fixed surface.

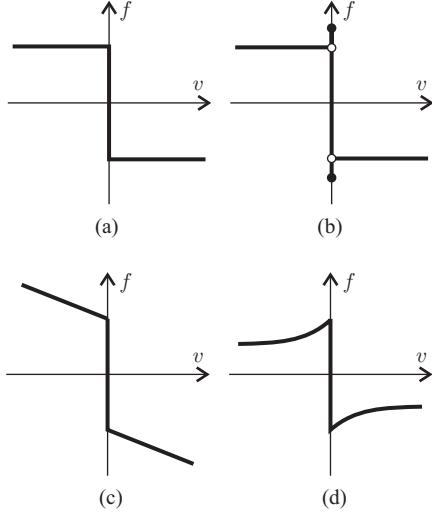


Fig. 2 Discontinuous friction models: (a) the Coulomb friction model, (b) Coulomb friction plus static friction, (c) Coulomb friction plus viscous friction, and (d) Coulomb friction plus Stribeck effect.

Fig. 2(c) は二面間に潤滑油が存在する場合を表す。この場合は速度に比例する粘性力が物体に作用するので、 $\phi(v)$  は以下になる。

$$\phi(v) = -\text{sgn}(v)F_C - Bv \quad (5)$$

Fig. 2(d) はいわゆる Stribeck 効果 [1, 2] を表す。これは、速度の増加とともに、面と面の間の潤滑油膜が厚くなり、摩擦力が減少する効果である。この現象は経験的に

$$\phi(v) = \text{sgn}(v) \left( F_C + (F_S - F_C) \exp \left[ - \left( \frac{|v|}{V_S} \right)^{\delta_S} \right] \right) \quad (6)$$

と表されることが多い。ここで  $V_S$  および  $\delta_S$  は実験に基づくパラメータである。

## 2.2 正則化された不連続摩擦モデル

一般に式 (1) で表される不連続摩擦モデルを離散時間シミュレーションに用いるのは困難である。これは  $v = 0$  における  $f$  の定義に起因する。関数  $f(v, h)$  のプロットを Fig. 3(a) に示す。関数  $f(v, h)$  は  $v = 0$  で  $v$  に関して不連続であり、 $v = 0$  のときのみ  $h$  に陽に依存する。Karnopp [12] は有限幅の零速度領域を定義することでこの問題を回避した。この手法は次のように表される。

$$f(v, h) = \begin{cases} -h & \text{if } |v| \leq \varepsilon \wedge |h| \leq F_S \\ -\text{sgn}(h)F_S & \text{if } |v| \leq \varepsilon \wedge |h| > F_S \\ \phi(v) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

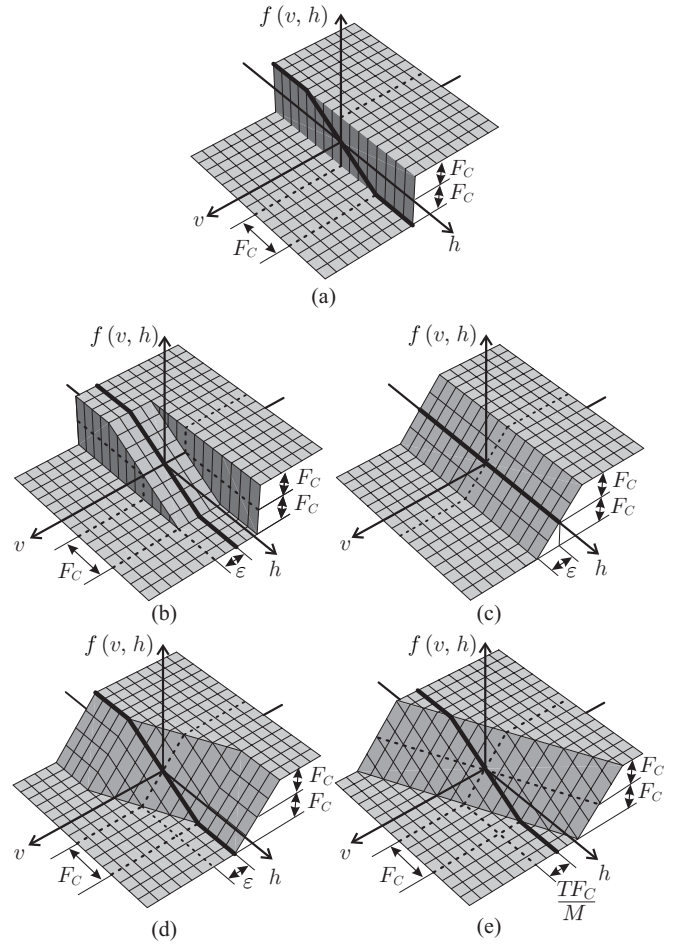


Fig. 3 Friction models: (a) Coulomb friction model, (b) Karnopp's model [12], defined by (7) and (3), (c) viscosity approximation [11], defined by (8), (d) Quinn's model [13], defined by (9), and (e) the proposed model, defined by (11). In all figures, the thick black lines represent the value of  $f$  with  $v = 0$ .

ここで、 $\varepsilon$  は微小な値であり、この値以下の速度は零と見なされている。この手法は特に力覚提示の分野で広く使われている [9, 15]。しかし、システムの挙動が  $\varepsilon$  の値の選び方に強く依存するということが知られている [10]。さらに、速度の閾値には物理的な意味が無いという問題もある。

Karnopp の方法 (7) でクーロン摩擦モデルを表したときの  $f(v, h)$  のプロットを Fig. 3(b) に示す。この図に見られるように、 $f(v, h)$  は  $v = \pm\varepsilon$  において不連続である。この不連続性を取り除くためには、クーロン摩擦力を微小速度領域において粘性摩擦力で近似する方法が考えられる。この手法は Martins と Oden [11] によって既に試みられており、このとき摩擦力は

$$f(v, h) = \begin{cases} -F_C v / \varepsilon & \text{if } |v| \leq \varepsilon \\ -\text{sgn}(v)F_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

となる。Fig. 3(c) に示されるように、この  $f(v, h)$  は連続である。しかし、 $v = 0$  におけるその挙動はクーロン摩擦モデルの挙動とは完全に異なる。すなわち、摩擦力は  $v = 0$  において、外力  $h$  と釣合わない。

クーロン摩擦モデルとの整合性を保ちつつ不連続性を除去するため、Quinn [13] は以下と等価なモデルを提案した。

$$f(v, h) = \begin{cases} -F_C \bar{v} / \varepsilon & \text{if } |\bar{v}| \leq \varepsilon \\ -\text{sgn}(\bar{v}) F_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9a)$$

ただしここで、

$$\bar{v}(v, h) = \begin{cases} v + \varepsilon h / F_C & \text{if } |h| \leq F_C \\ v + \text{sgn}(h) \varepsilon & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9b)$$

である。上記の  $f(v, h)$  を Fig. 3(d) に示す。このモデルの挙動もまた  $\varepsilon$  の値に影響されるが、残念ながらその最適値は示されていない。この正則化の手法を任意の  $\phi(v)$  を持つ一般的な不連続摩擦モデルへ適用する方法も、Quinn の論文では述べられていない。

上記のいずれのモデルにおいても、外力が働かないときでさえ、速度は有限時間内には 0 へ到達しない。これは式 (1) で定義される連続時間での不連続摩擦モデルとの大きな違いである。

### 3. 提案手法

#### 3.1 クーロン摩擦モデルの正則化

式 (1) で定義される不連続摩擦モデルは、連続時間系において、速度が有限時間内に 0 へ到達するように働く。本節では、有限時間で零速度に収束することが保証され、Karnopp モデルに見られるような閾値設定の任意性を持たない、(1) の新しい離散時間近似を提案する。

物体の加速度は式 (2) に示すように  $\dot{v} = (h + f)/M$  によって与えられる。したがって、離散時間シミュレーションでは、次のステップにおける速度は、

$$v := v + T(h + f)/M \quad (10)$$

となる。ここで  $T$  はサンプリング時間である。上式左辺の  $v$  の値は、 $f = -h - Mv/T$  のときだけ 0 となる。式 (1) と式 (3) で定義されるクーロン摩擦モデルでは、 $f$  の大きさの上限が  $F_C$  であることに注意すると、 $f$  を

$$f(v, h) = \begin{cases} -h - Mv/T & \text{if } |-h - Mv/T| \leq F_C \\ \text{sgn}(-h - Mv/T) F_C & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書くことができる。これを用いると、 $|h + Mv/T| \leq F_C$  が満たされるときに次の時刻の速度が 0 となる。この定義はさらに次のように書くことができる。

$$f(v, h) = \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } |\bar{v}| \leq TF_C/M \\ -\text{sgn}(\bar{v}) F_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11a)$$

ただしここで

$$\bar{v}(v, h) = v + Th/M \quad (11b)$$

である。式 (11) のプロットを Fig. 3(e) に示す。この新しいモデルは、 $v = 0$  においてクーロン摩擦モデルと等価である。さらにこのモデルの  $T \rightarrow 0$  における極限は、クーロン摩擦モデルと一致する。

#### 3.2 一般的な不連続摩擦モデルへの適用

次に、前節で用いた正則化の手法をさらに一般化する手法を考察する。すなわち、式 (1) 内の関数  $\phi(v)$  を任意とした場合の、式 (11) の一般化を考察する。以下の議論では、下付文字  $k$  で時刻を表す。式 (10) および (11) を用いた場合、時刻  $kT$  における速度  $v_k$  および摩擦力  $f_k$  はそれぞれ次のように決定される。

$$\bar{v} = v_{k-1} + Th_k/M \quad (12a)$$

$$f_k = \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } |\bar{v}| \leq TF_C/M \\ -\text{sgn}(\bar{v}) F_C & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12b)$$

$$v_k = \bar{v} + Tf_k/M \quad (12c)$$

ここで、式 (12b) 中の  $\text{sgn}(\bar{v})$  は、 $|\bar{v}| > TF_C/M$  であるから、 $\text{sgn}(v_k)$  と等しい。そのため、式 (3) によって  $\phi(v)$  が定義されるとき、 $v_k$  と  $f_k$  は  $f_k = \phi(v_k)$  の関係を満たすことがわかる。これは Karnopp や Quinn のモデルとの大きな違いである。これらのモデルは  $f_k \approx \phi(v_{k-1})$  が満足されるように設計されており、 $v_k$  には注意が払われていない。この点を念頭におくと、式 (12b) の自然な一般化として以下の表現が得られる。

$$f_k = \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } |\bar{v}| \leq T|\phi(\pm 0)|/M \\ \phi(v_k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

ここでは簡単のため、 $F_S = -\phi(+0) = \phi(-0)$  と仮定している。式 (12c) および式 (13) により、 $v_k$  および  $f_k$  は相互に依存しており、 $f_k$  は  $\bar{v}$  の陰関数となっている。そこで、関数

$$\hat{\phi}(\bar{v}) = f \quad \text{s.t.} \quad f = \phi(\bar{v} + Tf/M) \quad (14)$$

を新たに定義すると、 $f_k$  は  $\bar{v}$  の陽関数として書くことができる。これを用いると、結局式 (12) の一般化は以下のように書くことができる。

$$\bar{v} = v_{k-1} + Th_k/M \quad (15a)$$

$$f_k = \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } |\bar{v}| \leq T|\phi(\pm 0)|/M \\ \hat{\phi}(\bar{v}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15b)$$

$$v_k = \bar{v} + Tf_k/M \quad (15c)$$

Fig. 4 はこの手法を模式的に表している。 $\hat{\phi}(v)$  が解析的に得られない場合でも、 $\phi(v)$  が  $v > 0$  および  $v < 0$  において十分に滑らかであれば、

$$\hat{\phi}(v) \approx \phi(v - \text{sgn}(v)T|\phi(\pm 0)|/M) \quad (16)$$

として実用上は問題がない。

#### 3.3 相対運動

次に、Fig. 5 のように 2 つの可動物体が互いに接触している状況を考える。これらの物体の運動方程式は  $M_a \dot{v}_a = h_a + f$  および  $M_b \dot{v}_b = h_b - f$  で与えられる。したがってこのとき、速度は以下のように更新されることになる。

$$v_a := v_a + T(h_a + f)/M_a \quad (17a)$$

$$v_b := v_b + T(h_b - f)/M_b \quad (17b)$$

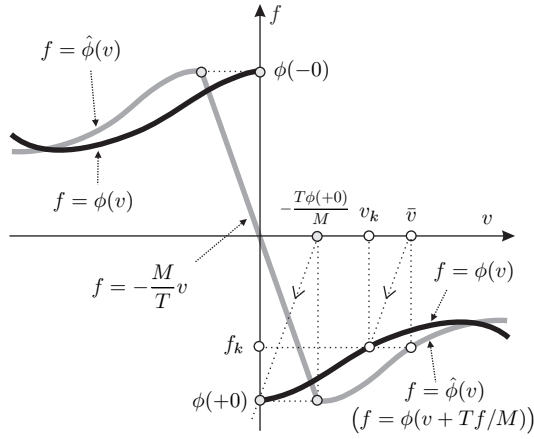


Fig. 4 Regularization of  $\phi(v)$  to guarantee  $f_k = \phi(v_k)$ .

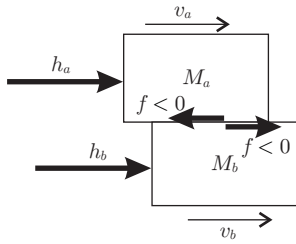


Fig. 5 Relative movement between two mobile objects.

摩擦力は相対速度  $v_a - v_b$  を 0 へ到達させるように働く。前節と同様の導出により、速度と摩擦力の更新則は以下ようになる。

$$\bar{v}_a = v_{a,k-1} + Th_{a,k}/M_a \quad (18a)$$

$$\bar{v}_b = v_{b,k-1} + Th_{b,k}/M_b \quad (18b)$$

$$\bar{v}_{ab} = \bar{v}_a - \bar{v}_b \quad (18c)$$

$$f_k = \begin{cases} -M_{ab}\bar{v}_{ab}/T & \text{if } |\bar{v}_{ab}| \leq T|\phi(\pm 0)|/M_{ab} \\ \hat{\phi}(\bar{v}_{ab}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18d)$$

$$v_{a,k} = \bar{v}_a + Tf_k/M_a \quad (18e)$$

$$v_{b,k} = \bar{v}_b - Tf_k/M_b \quad (18f)$$

ただしここで、 $M_{ab} = M_a M_b / (M_a + M_b)$  である。

### 3.4 最大静止摩擦力が動摩擦力より大きい場合

Fig. 2(b) に示ような、最大静止摩擦力が動摩擦力より大きい場合 ( $F_S > |\phi(\pm 0)|$ ) を考察する。このときには、Fig. 6 に示すようなヒステリシスのループを作るとよい。この図では、灰色の太線部分が固着領域を表し、黒い太線部分が滑り領域を表す。横軸は  $v$  ではなく  $\bar{v}$  であり、 $v$  は固着領域では常に 0 であることに注意されたい。固着領域から滑り領域への遷移は摩擦力が  $F_S$  を超えたときに発生する。また、滑り領域から固着領域への遷移は  $|\bar{v}|$  が  $T|\phi(\pm 0)|/M$  を下回ったときに発生する。固着・滑り状態を区別するために、二値状態変数  $s$  を導入すると、更新手順は以下のように

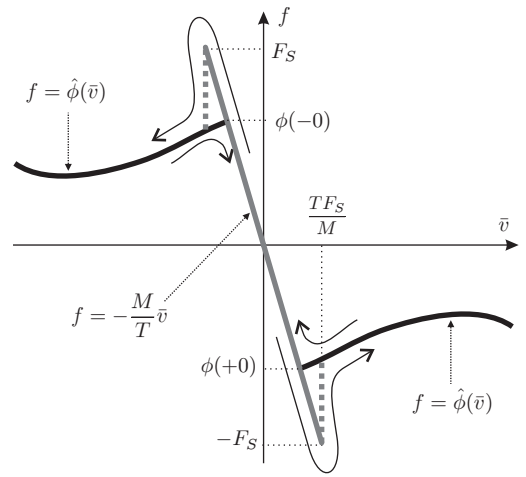


Fig. 6 Regularization of friction model including static friction.

なる。

$$\bar{v} = v_{k-1} + Th_k/M \quad (19a)$$

$$s_k = \begin{cases} \text{STICK} & \text{if } |\bar{v}| \leq T|\hat{\phi}(\bar{v})|/M \\ \text{SLIP} & \text{if } |\bar{v}| > TF_S/M \\ s_{k-1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19b)$$

$$f_k = \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } s_k = \text{STICK} \\ \hat{\phi}(\bar{v}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19c)$$

$$v_k = \bar{v} + Tf_k/M \quad (19d)$$

上記に示した固着状態と滑り状態の間の遷移則には改善の余地がある。このためには、接触面の微視的構造における詳細な現象を考慮する必要があると思われる。

### 3.5 多次元ベクトル表現

多次元ベクトル表現への拡張が容易であるという点は、提案モデルの大きな利点である。このためには、上記の導出において、演算子  $\text{sgn}$  を正規化演算子  $\text{sgn}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  で置き換えればよい。ただし、摩擦力  $\phi(\bar{v})$  は  $\bar{v}$  と逆の方向を持つように定義される必要がある。すなわち

$$\bar{v}^T \phi(\bar{v}) = -\sqrt{\bar{v}^T \bar{v}} \sqrt{\phi(\bar{v})^T \phi(\bar{v})} \quad (20)$$

が満たされる必要がある。式 (20) の条件を満たさない異方性の摩擦力を厳密に扱うためには、さらなる考察が必要である。

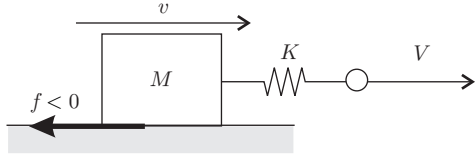
## 4. 数値シミュレーション

数値シミュレーションにより、提案モデル、Karnopp モデル、および Quinn モデルの比較を行った。Fig. 7 に示すように、質量  $M = 1$  kg の物体に、剛性  $K = 90$  N/m のバネが取り付けられている。バネの終端は下記で定義される速度  $V(t)$  で引張られる。

$$V(t) = \begin{cases} 2 \text{ m/sec} & \text{if } t \leq 2 \text{ sec} \\ 0 \text{ m/sec} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

**Table 1** Models used in the simulation

| name | model                                             |
|------|---------------------------------------------------|
| K1   | Karnopp's model with $\varepsilon = 1$ m/sec      |
| K2   | Karnopp's model with $\varepsilon = 0.01$ m/sec   |
| K3   | Karnopp's model with $\varepsilon = 0.0001$ m/sec |
| Q1   | Quinn's model with $\varepsilon = 1$ m/sec        |
| Q2   | Quinn's model with $\varepsilon = 0.01$ m/sec     |
| Q3   | Quinn's model with $\varepsilon = 0.0001$ m/sec   |
| P    | Proposed model                                    |

**Fig. 7** Simulation.

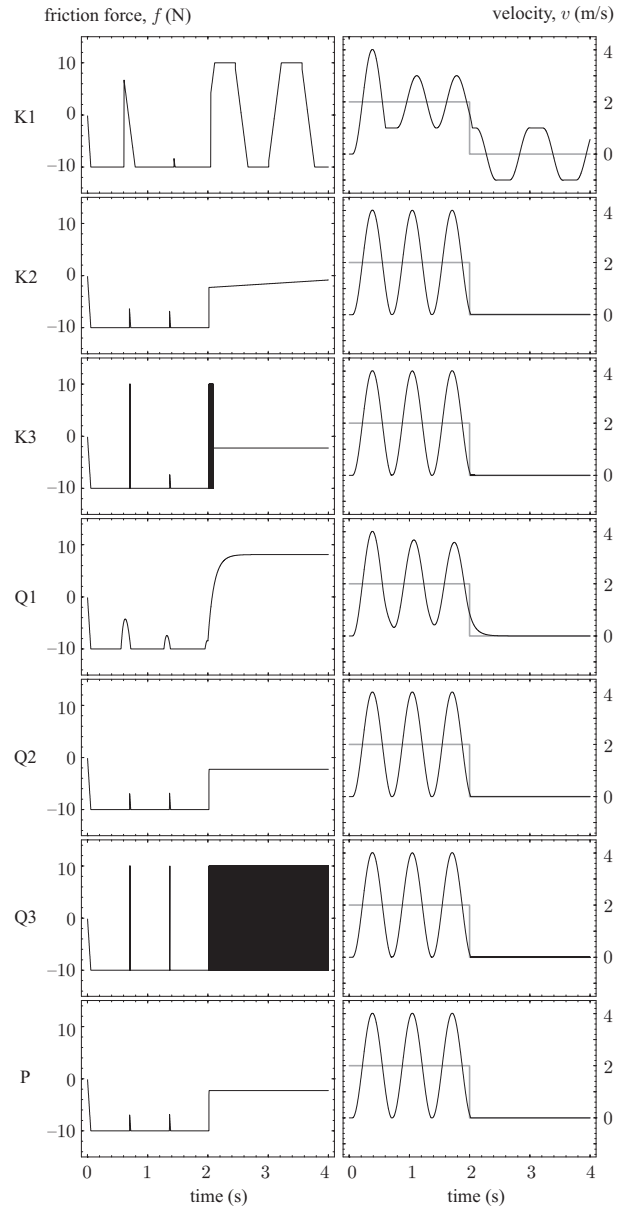
図中の右側を正として、クーロン摩擦力  $F_C = F_S = 10$  N が物体に働くものとする。なお、サンプリング時間は 0.001 sec とした。

Table 1 に示す 7 つのモデルについてシミュレーションを行った。異なる  $\varepsilon$  を持つ 3 つの Karnopp モデル、異なる  $\varepsilon$  を持つ 3 つの Quinn モデル、および提案モデル (11) である。7 つのモデルのそれぞれに対して、摩擦力  $f$  と速度  $v$  のプロットを Fig. 8 に示す。速度グラフ内の灰色の線は  $V(t)$  のプロットである。

モデル K1 の結果は明らかに不適当である。大きな  $\varepsilon$  値を持つモデル Q1 では、速度が漸近的に 0 に収束しているが、収束は非常に遅い。非常に小さい  $\varepsilon$  を持つモデル K3 および Q3 は、バネ終端の停止以降 ( $t \geq 2$  sec) 力が振動的になっている。モデル K2 の速度グラフはモデル P に似ているが、モデル K2 では  $t = 3$  sec 以降でも速度が正の非零値となっている。この残留速度はバネ力に負方向への時間変化を生じ、それによって静止摩擦力が正方向に変化している。モデル Q2 と P の結果はほとんど等しい。これは、Fig. 3 に示したように、 $\varepsilon = TF_C/M$  のときの Quinn モデルと提案モデルが、 $|h| \leq F_C$  の領域において等しいためである。

最大静止摩擦力が動摩擦力より大きい場合においてもシミュレーションを行った。 $F_S = 13$  N および  $F_C = 10$  N として、モデル K2 と P を用いる。結果を Fig. 9 に示す。これらのモデルは、一定速度で引張られている間は同様の振舞いを示す。しかしバネ終端の停止 ( $t = 2$  sec) 後、モデル K2 にはわずかな正の速度が残り、そのためにバネ力と釣り合うように静止摩擦力が正方向へと変化している。一方、モデル P は、バネ終端の停止後ただちに零速度へ到達する。

Fig. 3(d) と (e) の比較から分かるように、提案モデル (モデル P) と最適化された Quinn モデル (モデル Q2) の相違は、零速度近傍で外力が摩擦力を上回る ( $|h| > F_C$ ) 場合のみ現れる。この違いを示すために、さらに別のシミュレーションを行った。初速度  $v = -0.13$  m/sec で運動している質量 1 kg の物体に、時刻  $t = 0$  sec より 40 N の力を加え続けた。摩擦力は  $F_C = F_S = 10$  N、サンプリング時間は 0.001 sec とした。このときの摩擦力と速度の履歴を Fig. 10 に示

**Fig. 8** Simulation results with  $F_C = F_S = 10$  N.

す。灰色の折れ線は、解析解 (連続時間表現から得られた正確な値) を表す。時間と速度のスケールに注意されたい。ここに示されるように、外力が摩擦力を上回るとき、提案モデルと Quinn モデルは零速度をまたぐ瞬間に互いに異なる挙動を示す。零速度をまたいだ後 ( $t \geq 0.004$  sec), Quinn モデルは解析解よりも大きい速度を持つことが分かる。これは、零速度をまたぐ時刻 ( $t = 0.003$  sec) において、Quinn モデルの摩擦力が運動エネルギーを増大させる方向に働いたことが原因である。一方、提案モデルの摩擦力は常に運動エネルギーを減少させる方向に働くので、このモデルは連続時間系よりも消散的な近似であるといえる。モデル全体が安定で現実的な挙動をとるためには、消散的な近似がより望ましい。

ここで示された結果は、モデル P が他の全てのモデルよりも妥当であることを示している。モデル P とモデル Q2 の差異は非常に小さいが、これは、 $\varepsilon = 0.01$  m/sec



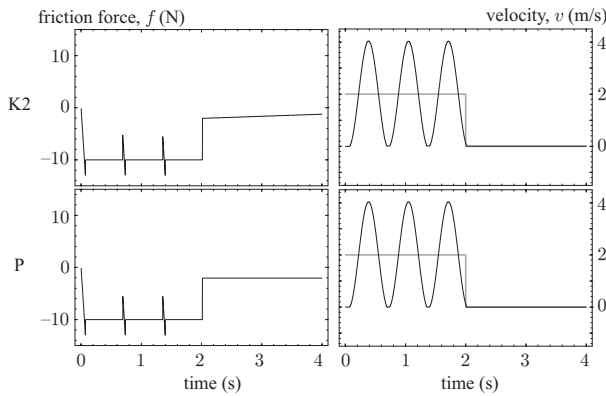


Fig. 9 Simulation results with  $F_C = 10$  N and  $F_S = 13$  N.

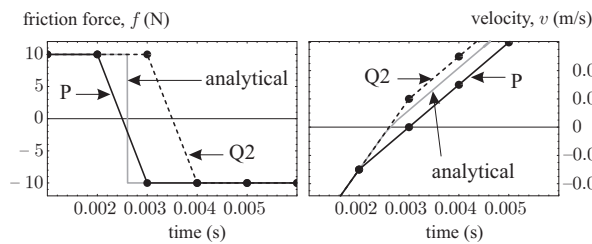


Fig. 10 Simulation results with  $F_C = F_S = 10$  N and a constant external force  $h = 40$  N. Gray lines represent analytical results.

が Quinn モデルの本シミュレーションにおける最適値であるからである。第 3 節で述べたように、Quinn モデルは安定で現実的な挙動をするように  $\varepsilon$  値を調整する必要がある。これに対して、提案モデルではパラメータ調整の必要がない。また、提案モデルは任意の速度・力関係を持つ不連続摩擦モデルに適用できるという利点もある。

## 5. 結言

本論文では、不連続な摩擦モデルを離散時間での数値シミュレーションで用いるための、新しい手法を提案した。提案手法では、慣性質量とサンプリング時間に基づいて、有限時間内に速度が 0 へ到達するように摩擦力が決定される。この手法は一定サンプリング時間でのシミュレーションに用いることができ、従来のモデルに見られるようなパラメータ調整の任意性の余地がない。また、多次元ベクトル表現への拡張も容易であり、任意の力・速度の関係を持つ一般的な不連続摩擦モデルに適用できる。簡単な数値シミュレーションによって有効性が示された。

筆者らはこの摩擦モデルを自動車製造現場でのパワーアシスト装置 [14] に適用することを意図している。提案手法で実現された仮想的なクーロン摩擦力 ( $F_S = F_C$  である摩擦モデル) は、正確な位置決め作業に適している [15, 16]。

なお、この研究はトヨタ自動車株式会社の補助を受けて行われている。ここに記して感謝する。

## 参考文献

[1] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. Canudas

de Wit. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7):1083–1138, 1994.

[2] H. Olsson, K. J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4:176–195, 1998.

[3] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3), 1995.

[4] P. R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14(2):1675–1682, 1976.

[5] P. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong, and F. Altpeter. Single state elastoplastic friction models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):787–792, 2002.

[6] J. Swevers, F. Al-Bender, C. G. Ganseman, and T. Prajogo. An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):675–686, 2000.

[7] G. Ferretti, G. Magnani, and P. Rocco. An integral friction model. In *Proc. of the 2004 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1809–1813, 2004.

[8] A. Bonsignore, G. Ferretti, and G. Magnani. Analytical formulation of the classical friction model for motion analysis and simulation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5(1):43–54, 1999.

[9] S. E. Salcudean and T. Vlaar. On the emulation of stiff walls and static friction with a magnetically levitated input-output device. *Transactions of the ASME: Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119:127–132, 1997.

[10] C. Richard. *On the identification and haptic display of friction*. PhD thesis, Stanford University, 2000.

[11] J. A. C. Martins and J. T. Oden. A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 40(3):327–360, 1983.

[12] D. Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Transactions of the ASME: Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107:100–103, 1985.

[13] D. D. Quinn. A new regularization of coulomb friction. *Transactions of the ASME: Journal of Vibration and Acoustics*, 126(3):391–397, 2004.

[14] Y. Yamada, H. Konosu, T. Morizono, and Y. Umetani, “Proposal of skill-assist: A system of assisting human workers by reflecting their skills in positioning tasks,” In *Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 4, pages 11–16, 1999.

[15] C. Richard and M. R. Cutkosky. Friction modeling and display in haptic applications involving user performance. In *Proc. of the 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 605–611, 2002.

[16] 武居, 佐野, 望山, 菊植, 澤田, 藤本. 仮想摩擦特性の実現およびそれを利用した人間・機械系. 日本ロボット学会学術講演会講演論文集, 2D11, 2004.