

インピーダンス型離散時間摩擦モデル

菊植 亮, 藤本 英雄 (名古屋工業大学)

Impedance-Type Discrete-Time Friction Model

*Ryo Kikuuwe and Hideo Fujimoto (Nagoya Institute of Technology)

Abstract— We previously proposed a dissipative discrete-time friction model. This previous model is inconvenient for some control purposes such as haptic friction rendering because it is an admittance-type model, which accepts a force input and produces a velocity output. This paper proposes an impedance-type friction model. This model is based on a coupled system of a viscoelastic element and an admittance-type friction model, but allows the mass of the virtual object to be zero. Moreover, we extend this model into a more sophisticated friction model, which exhibits hysteresis in the presliding regime. Results of an experiment and a numerical simulation are presented.

Key Words: friction model, impedance, haptic display

1. はじめに

摩擦は全ての機械システムと日常生活の全てのものに存在する。摩擦のモデル化は、機械システムのモデルベース制御やシミュレーションのために、また、力覚提示装置を介したリアルな力覚提示のために重要な課題である。摩擦力は特に零速度近傍において非線形であり、このことが摩擦現象の離散時間シミュレーションを困難なものにしている。

クーロン摩擦モデルに代表される古典的な不連続摩擦モデルは、零速度において不連続な定義を持ち、零速度と非零速度で全く異なった定義を持つ。この種のモデルは直感的には理解しやすいが、数学的には扱にくい。このモデルを基にして離散時間の数値シミュレーションを行うときには、零速度領域と非零速度領域を切り替えるために閾値を設ける方法 [1] が広く用いられている。しかし、その閾値には物理的な意味がなく、また、閾値の選定によっては系が振動的になったり低い速度でドリフトしたりすることもある。著者は既報 [2] において、閾値の任意性をもたない離散時間の不連続摩擦モデルを提案した。このモデルによって決定される摩擦力は常に消散的であり、速度は有限時間で零に到達する。この手法では、Fig. 1 のように、外力と 1 ステップ前の速度から摩擦力が決定され、外力と摩擦力に基づいて速度が更新される。すなわち、外力を入力とし、速度を出力するアドミッタンス型モデルであるといえる。

アドミッタンス型モデルは、力センサを備えた力覚提示デバイス（たとえば FCS Robotics 社の Haptic-MASTER [3] など）で用いるのに適している。しかし、Sensible 社の Phantom に代表されるような、力センサを持たない軽量・低出力な力覚提示装置では、位置（速度）の計測値を入力としてアクチュエータへの指令力を出力するインピーダンス型モデルがより適している。Fig. 2 のように、アドミッタンス型モデルは仮想的な粘弾性要素を介在させることにより、インピーダンス型モデルに変換することができる。ただし、既報 [2] のアドミッタンス型摩擦モデルは質量値による除算を含んでいるので、これをインピーダンス型モデルに

変換したとしても、質量を小さくすることができない。

本稿では、不連続摩擦モデルと粘弾性要素とを直列結合して構成された Fig. 2 のようなシステムをもとにして、新しいインピーダンス型離散時間摩擦モデルを提案する。このモデルは、Fig. 2 のシステム全体を後退差分法を用いて書き下すことによって得られたモデルであり、零質量を許容する。また、多次元への拡張性という既報のアドミッタンス型モデルの利点は、そのまま提案モデルに継承されている。提案モデルは、力センサを持たない力覚提示装置での使用に有用であると期待できる。

力学提示以外の分野でも、現実の摩擦現象のモデル化は重要な課題である、ここで提案する手法は、摩擦補償制御のためにも有用である可能性がある。提案手法をもとにして、現実の摩擦現象に存在するヒステリシスを含むモデルを作ることにも可能である。また、本手法は離散時間系で定式化されているので、デジタル制御系に容易に組み込むことができる。

2. 不連続（アドミッタンス型）摩擦モデル

まず、著者が既報 [2] で提案した離散時間不連続摩擦モデルについて、簡単に説明する。

Fig. 1 のように、質量 M の物体が固定面と接触し、その面に対して速度 v で移動しているとすると、物体には外力 h と固定面からの摩擦力 f が働いているとすると、物体の運動方程式は、

$$M\dot{v} = h + f \quad (1)$$

となる。古典的なクーロン摩擦の考え方に基くと、摩擦力 f は、速度 v と外力 h の関数

$$\Phi(v, h) = \begin{cases} -h & \text{if } v = 0 \wedge |h| \leq |\phi(\pm 0)| \\ -\text{sgn}(h)|\phi(\pm 0)| & \text{if } v = 0 \wedge |h| > |\phi(\pm 0)| \\ \phi(v) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

を用いて $f = \Phi(v, h)$ と表される。ここで、 $\phi(v)$ は全ての $v \neq 0$ において、 $\phi(v)v \leq 0$ を満たす関数であり、クーロン摩擦力に加えて粘性抵抗力や Stribeck 効果 [4] など

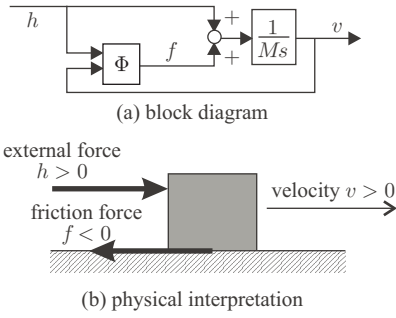


Fig.1 Discontinuous (admittance-type) friction model.

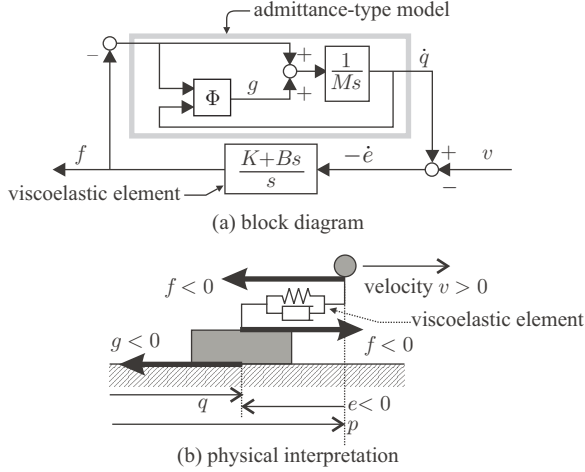


Fig.2 Continuous (impedance-type) friction model.

を加味することもできる．クーロン摩擦力のみが働く場合は $\phi(v) = -\text{sgn}(v)F$ となる．ここで F は正の定数である． $v \rightarrow +0$ および $v \rightarrow -0$ において $\phi(v)$ は極限を持つと仮定する．ここでは簡単のため、 $-\phi(+0) = \phi(-0)$ と仮定しており $|\phi(\pm 0)| = |\phi(+0)| = |\phi(-0)|$ とあらわすことにする．

既報で提案した手法は、式 (2) の離散時間近似として、

$$\Phi(v, h) \approx \Phi^m(v + Th/M) \quad (3)$$

を用いるものである．ただし、

$$\Phi^m(u) = \begin{cases} -Mu/T & \text{if } |u| \leq T|\phi(\pm 0)|/M \\ \phi^m(u) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4a)$$

$$\phi^m(u) = f \quad \text{s.t.} \quad f = \phi(u + Tf/M) \quad (4b)$$

である．なお、 $\phi(v)$ が $v > 0$ および $v < 0$ において十分に滑らかであれば、

$$\phi^m(u) \approx \phi(u - \text{sgn}(u)T|\phi(\pm 0)|/M) \quad (5)$$

として実用上は問題がない．また、 $\phi(v) = -F\text{sgn}(v)$ の場合は、下記のように単純な形になる．

$$\Phi^m(u) = \begin{cases} -Mu/T & \text{if } |u| \leq TF/M \\ -F\text{sgn}(u) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

上記の方法と速度の更新則とをあわせて考えると、結局このモデルにおいて、摩擦力の決定と速度の更新は

下記のようになる．

$$f_k = \Phi^m(v_{k-1} + Th_k/M) \quad (7a)$$

$$v_k = v_{k-1} + T(f_k + h_k)/M \quad (7b)$$

ここで、添字 k は時刻をあらわす．この方法を用いると、 f_k と v_k の符号は必ず逆であり、 f_k は v_k を 0 に近づける向きに働くことになる．また、 $|v_{k-1} + Th_k/M| \leq T|\phi(\pm 0)|/M$ のとき $v_k = 0$ となるので、外力が働かない状況では零速度に有限時間内で到達することになる．

この手法は、Fig. 1 に示すように、 h_k を入力とし、 v_k を出力とするアドミッタンス型の手法であるといえる．

3. インピーダンス型摩擦モデル

3.1 提案手法

アドミッタンス型モデルは、Fig. 2 のように、仮想的な粘弾性要素を直列結合することによって、インピーダンス型モデルに変換することができる．粘弾性要素によって、速度の入力が力に変換されてアドミッタンス型システムに入力され、そこから出力される速度は力に変換されて出力される．ただし、前節で説明したアドミッタンス型摩擦モデルは質量による除算を含んでいるため、これをそのままインピーダンス型システムに変換しても、質量の値を小さくすることができない．ここでは、Fig. 2 の形を持ち、零質量を許容するインピーダンス型離散時間摩擦モデルを提案する．

まず、粘弾性要素の端点の位置および速度をそれぞれ p および v とする．粘弾性要素からの反力と、可動物体に固定面から加わる力を、それぞれ f と g とする．また、可動物体の位置を q とする．力覚提示装置に実装した場合、位置 p は位置の計測値に、力 f はアクチュエータへの指令力に対応する．

力 f は粘弾性要素によって下記のように決定される．

$$f = -K(p - q) - B(\dot{p} - \dot{q}) \quad (8)$$

ここで K および B はそれぞれ粘弾性要素の弾性係数および粘性係数である．可動物体の運動方程式は下記のようになる．

$$M\ddot{q} = g - f \quad (9)$$

ここで g は $g = \Phi(\dot{q}, -f)$ のように書ける．これは、相対速度 \dot{q} および外力 $-f$ に依存する．式 (9) の離散時間表現は下記のようになる．

$$\Delta q_k = \Delta q_{k-1} + T^2(g_k - f_k)/M \quad (10)$$

ここで、 $\Delta q_k = q_k - q_{k-1}$ である．

既報のアドミッタンス型モデルをそのまま用いると、このシステムの離散時間表現は下記のようになる．

$$f_k = -K(p_k - q_{k-1}) - B(v_k - \Delta q_{k-1}/T) \quad (11a)$$

$$g_k = \Phi^m(\Delta q_{k-1}/T - Tf_k/M) \quad (11b)$$

$$\Delta q_k = \Delta q_{k-1} + T^2(g_k - f_k)/M \quad (11c)$$

ここで $v_k = (p_k - p_{k-1})/T$ である．前にも述べたように、この方法は $M = 0$ のとき使用できない．

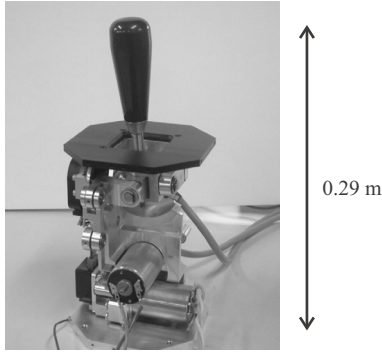


Fig.3 Experimental setup: a force-feedback joystick.

提案手法では，式 (11a) の代わりに，下式を用いる．

$$\begin{aligned} f_k &= -K(p_k - q_k) - B(v_k - \Delta q_k/T) \\ &= -K(p_k - q_{k-1}) - Bv_k + (K+B/T)\Delta q_k \quad (12) \end{aligned}$$

ここで， q は式 (11a) 中のそれに比べて，1 ステップ進んでいることに注意されたい．式 (11a) は前進差分法に基づいているのに対して，式 (12) は後進差分法に基づいている．式 (10) と式 (12) より， Δq_k と f_k は相互に依存しているが，これらを連立方程式として解くと，

$$\Delta q_k = Tu + T^2 g_k / C \quad (13)$$

ただし

$$u = v_k + \frac{TK}{C}(p_{k-1} - q_{k-1}) - \frac{M}{C}\left(v_k - \frac{\Delta q_{k-1}}{T}\right) \quad (14)$$

$$C = M + TB + T^2 K \quad (15)$$

が得られる．

$\Delta q_k \neq 0$ であるとき，摩擦力 g_k は相対速度 $\Delta q_k/T$ に依存して $g_k = \phi(\Delta q_k/T)$ と決定される．一方，式 (13) に $\Delta q_k = 0$ を代入すると， $g_k = -Cu/T$ となり，これは $|g_k| \leq |\phi(\pm 0)|$ のときのみ成立する．したがって，

$$g_k = \begin{cases} -Cu/T & \text{if } |u| \leq T|\phi(\pm 0)|/C \\ \phi(\Delta q_k/T) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

となる．ここで，式 (13) を考慮に入れると，式 (16) は

$$g_k = \Phi^c(u) \quad (17a)$$

$$\Phi^c(u) = \begin{cases} -Cu/T & \text{if } |u| \leq T|\phi(\pm 0)|/C \\ \phi^c(u) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17b)$$

$$\phi^c(u) = f \quad \text{s.t. } f = \phi(u + Tf/C) \quad (17c)$$

と書き直すことができる．結局，このモデルの更新則は

$$u = v_k - \frac{TK}{C}e_{k-1} - \frac{M}{C}\left(v_k - v_{k-1} - \frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{T}\right) \quad (18a)$$

$$g_k = \Phi^c(u) \quad (18b)$$

$$e_k = e_{k-1} - Tv_k + T(u + Tg_k/C) \quad (18c)$$

$$f_k = Ke_k + B(e_k - e_{k-1})/T \quad (18d)$$

となる．ただし， $e = q - p$ である．

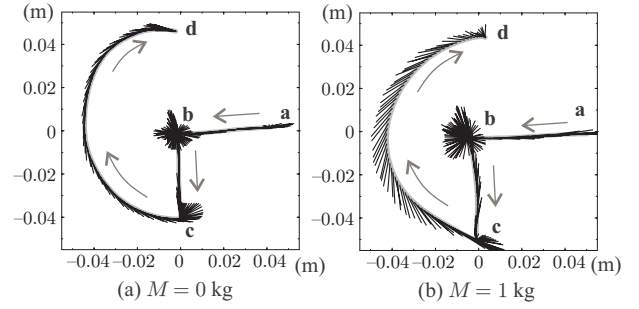


Fig.4 Experimental results.

式 (18) のモデルは $M = 0$ でも用いることができる． $M = 0$ ， $B = 0$ ，そして $\phi(v) = -\text{sgn}(v)F$ であるとき，このシステムは質量の無い完全弾塑性要素になり，Hayward と Armstrong [5] のモデルと等価になる．

なお，このモデルは多次元にも拡張できる．式 (18) 中の各変数はベクトルであってもよい．クーロン摩擦の場合は特に簡単であり，

$$\Phi^c(u) = \begin{cases} -Cu/T & \text{if } |u| \leq TF/C \\ -\text{sgn}(v)F & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

と書くことができる．ただし，ここで符号関数 $\text{sgn}(\cdot)$ はベクトルの正則化関数 $\text{sgn}(x) = x/|x|$ で読み換える．

3.2 力覚提示実験

提案モデルを Fig. 3 の装置に実装して，実験を行った．この装置は，2 個の DC サーボモータによって駆動される，2 自由度力帰還ジョイスティックである．ジョイスティックの先端位置はサーボモータに装着されたエンコーダにより計測される．

ここでは，提案モデルの 2 次元バージョンを用いる．エンコーダによって計測された速度はモデルに入力され，出力された力 f はそのまま DC モータの駆動力として指令される．ただし， $T = 0.001 \text{ sec}$ ， $\phi(v) = -F\text{sgn}(v)$ ， $F = 4 \text{ N}$ ， $K = 6000 \text{ N/m}$ ， $B = 10 \text{ Ns/m}$ ， $M = 0 \text{ kg}$ または 1 kg とした．

Fig. 4(a) および Fig. 4(b) に，それぞれ $M = 0 \text{ kg}$ および $M = 1 \text{ kg}$ のときの実験結果を示す．太い曲線はジョイスティックの先端位置の軌跡を表し，細い線分はサーボモータにより出力された力のベクトル (0.01 sec 毎) を示す．式 (9) より， $M = 0$ のとき発生力 f は摩擦力 g と等しいが， M が非零の時は，発生力 f は慣性力や遠心力も含む．この違いは Fig. 4(a) と Fig. 4(b) との違いに表れている．Fig. 4(a) および (b) 中の位置 b において，実験者の手から加えられる力はクーロン摩擦力 F より小さいので，ジョイスティックは一点に固定されるように制御される．全体として，この結果は提案手法の有効性を示している．

4. 滑り前ヒステリシスの実現

提案モデルは，固着状態においても弾性変位を生じる．固着状態での微小な弾性変位は現実の機械システムにも存在し，これは滑り前変位 (presliding displacement) と呼ばれている．ただし，現実の滑り前変位は通常非

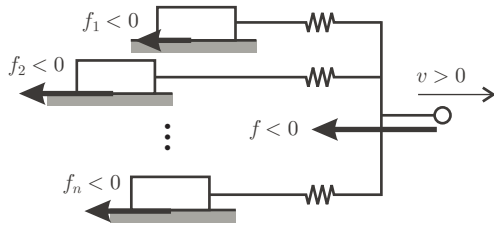


Fig.5 The Maxwell slip model.

線形であり、ヒステリシスがある．また，固着状態と滑り状態の境界は明確ではない．

クーロン摩擦モデルが含んでいない滑り前変位を記述するために，制御工学の分野で様々な摩擦モデルが提案されている [6, 7, 8, 9, 10]．これらのモデルの多くは速度を入力とし，摩擦力を出力とするインピーダンス型の構造を持っている．たとえば，これらのモデルの始祖である Dahl モデル [6] は，下記のように摩擦力を決定する．

$$f = Ke, \quad \dot{z} = v(1 + \text{sgn}(v)Ke/F) \quad (20)$$

ここで， e は弾性変位と解釈できる状態変数であり， K は固着状態における初期弾性係数である．各変数の符号は Fig. 2 のように設定されている．これらのモデルのほとんどは，式 (20) に示すように，経験的観察に基づいた連続時間での微分方程式に基づいているので，物理的解釈が難しい．

一般的なヒステリシス挙動を表すためには，古典的な Maxwell 滑りモデル (Fig. 5) の有効性が示されている [11]．このモデルは，複数の質量の無い完全弾塑性要素の並列接続である．この Maxwell 滑りモデルを摩擦モデルに応用した例も提案されている [10]．ただし，これもまた直感的解釈がしにくいものであり，多次元への拡張も容易ではない．

本稿で提案する摩擦モデルは直感的に理解しやすい構造を持っている．提案モデルの滑り前変位は線型であるが，Fig. 5 のように，提案モデルの多数の複製を並列結合すれば，滑り前変位にヒステリシスをもたせることができる．これは，任意の速度依存摩擦，非零の質量，および非零の粘性を許容するという点で，Maxwell 滑りモデルの一つの一般化である．また，離散時間系で定式化されているのでデジタル制御系への組み込みが容易であり，多次元への一般化も可能である．もっとも，このモデルは，frictional lag [4] (入力速度と，速度依存の摩擦力との間に生じる時間遅れ) を含んでいない．提案モデルは，現実の摩擦現象の精密なモデルとしての応用も考えられるが，このための改良は今後の課題である．

ヒステリシス挙動を実現する数値シミュレーションを行った．異なる摩擦力を持つインピーダンス型摩擦モデルを 10 個並列に接続した複合モデルを作成した．各要素モデルについて $K = 10 \text{ N/mm}$ ， $B = 0.1 \text{ Ns/mm}$ ， $M = 0 \text{ kg}$ ， $F = 1, 2, \dots, 10 \text{ N}$ とした．時間刻みは $T = 0.001 \text{ sec}$ とした．Fig. 6(a) で示す位置入力をこのシステムに与え，出力の力の値を記録した．Fig. 6(b) は位置と力の関係を表したグラフである．このモデル

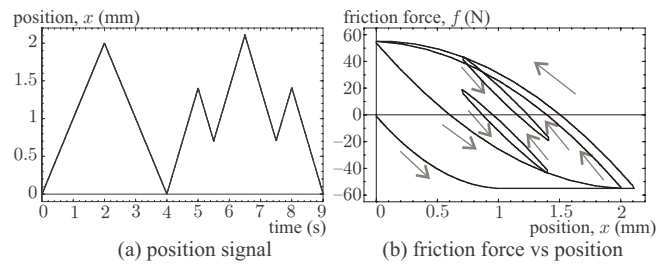


Fig.6 Simulation results.

は滑らかなヒステリシス挙動を示すことが示されている．全てのループは閉じている．これは現実のヒステリシス現象の重要な性質である [9]．

この複合モデルは力覚提示にも有効である可能性がある．力覚提示で摩擦のある物体表面を提示する際に，滑り前変位のヒステリシスが主観的な触感にどのように影響するかは興味深い．この効果を調べるための心理物理実験は今後の課題である．

謝辞

この研究はトヨタ自動車株式会社の補助を受けて行われている．ここに記して感謝する．また，本研究の遂行にあたり御協力を頂いた，名古屋工業大学の武居直行講師，佐野明人教授，望山洋助教授に感謝いたします．

参考文献

- [1] D. Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107(1):100-103, 1985.
- [2] 菊植, 他. 有限時間で零速度に収束する不連続摩擦モデル. 第 10 回ロボティクスシンポジウム, pp. 215-220, 2005.
- [3] R. Q. Van Der Linde et al. The HapticMASTER, a new high-performance haptic interface. *Proc. of EuroHaptics 2002*, pp. 1-5, 2002.
- [4] B. Armstrong-Hélouvy et al. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7):1083-1138, 1994.
- [5] V. Hayward and B. Armstrong. A new computational model of friction applied to haptic rendering. *Experimental Robotics VI*, pp. 404-412. Springer, 2000.
- [6] P. R. Dahl. A solid friction model. Technical Report TOR-0158(3107-18)-1, Aerospace Corporation, 1968.
- [7] C. Canudas de Wit et al. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(3), 1995.
- [8] P. Dupont et al. Single state elastoplastic friction models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(5):787-792, 2002.
- [9] J. Swevers et al. An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(4):675-686, 2000.
- [10] V. Lampaert et al. A generalized Maxwell-slip friction model appropriate for control purposes. *Proc. of Int. Conf. on Physics and Control*, pp. 1170-1177, 2003.
- [11] W. D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *J. of Applied Mechanics*, 33(4):893-900, 1966.