

滑り状態に有限時間到達する離散時間スライディングモード制御

菊植 亮, 藤本 英雄 (名古屋工業大学)

Discrete-Time Sliding Mode Control With Finite-Time Sliding-Mode Reaching

*Ryo Kikuuwe and Hideo Fujimoto (Nagoya Institute of Technology)

Abstract— High-gain PD position controllers, which are widely used with industrial robots, involve some risk in cases of abnormal conditions, such as unexpected contact and power-down. This paper presents a new type of sliding-mode-based position controller. This controller has very simple structure, but it is capable of (1) accurate tracking to the target position in normal conditions, and (2) smooth convergence to the target position after abnormal conditions. Experimental results are presented.

Key Words: sliding mode, safety, industrial robots, position control, chattering-free

1. はじめに

一般に産業用ロボットは、関節摩擦などのモデル化しにくい機械要素を多く含む。このため、力制御やインピーダンス制御を行う際にも、高ゲインのPD（またはPID）制御方式の位置制御器を最下層のフィードバックループとして用いることが多い。しかし、高ゲインのPD位置制御は、安全性に問題がある。たとえば、環境との接触や、アクチュエータの一時的なパワー低下などによって、位置制御器の目標位置とロボットの先端位置との偏差が大きくなった場合、大きな復元力によって環境が損傷を受けたり、復帰動作の際に過大な速度が発生したりすることがある。

位置制御されているロボットで、正常時の追従性と異常時の安全性とを両立する問題は単純ではない。まず、アクチュエータの出力トルクに上限を設けることは必要条件である。そして、異常状態から復帰する際にオーバーシュートを起こさずに目標軌道へゆるやかに収束する必要がある。これは、正常時の即応性・追従性と相反する要求であるといえる。PD制御において収束性を確保するためには、D（微分）ゲインを大きくする必要はあるが、これは正常運転時の即応性を低下させ、また、特に低速運動時に高周波振動の原因となる。このように、正常動作時の追従性と異常時の安全性との両立は、単純なPD制御のゲイン設計とトルク制限では対処できない問題を含んでいる。これらを両立する単純な制御則が望まれている。

スライディングモード制御 [1] は、状態空間に設計した切換面上に状態を拘束することによって希望の動特性を達成する制御法である。これは bang-bang 制御の1つの一般化であり、不連続な制御出力を発生する。外乱に対してロバストであるということがこの本来の利点であるが、アクチュエータ出力に明示的に上限を設けられるという点と、状態を希望の動特性に拘束できるという点は、安全性と追従性の両立という目的にもなっている。すなわち、トルク制限、正常動作時の追従性、および復帰動作時の収束性をすべて実現できる可能性がある。

スライディングモード制御の理論は、無限に高速に応答する連続時間系を前提としているので、通常の離

散時間系に実装された場合には、切換の繰り返しによって高周波振動（チャタリング）が発生する。本稿では、離散時間で実装できる、スライディングモード制御に基づいた位置制御法を提案する。なお、ここで提案する手法は、筆者らが既報で提案した離散時間でのインピーダンス型摩擦モデル（または連続摩擦モデル）[2, 3]の自然な一般化である。

2. スライディングモード制御

まず、スライディングモード制御 [1] について概説する。ここでは簡単のため、1自由度の位置制御系を考える。制御対象は質量 M の質点とし、その現在位置および現在速度をそれぞれ p および v とする。制御器は p および v を測定し、アクチュエータから力 g を発生する。制御器が設定する目標位置と目標速度をそれぞれ p_d および v_d とする。質点はアクチュエータからの力 g と外力 $-f$ を受けて運動する。すなわち質点の運動方程式は下記ようになる。

$$M\dot{v} = g - f \quad (1)$$

最も単純なスライディングモード制御器は、たとえば Fig. 1 のような構造を持つ。ここでアクチュエータからの出力は

$$g = F \operatorname{sgn}(p_d - p + H(v_d - v)) \quad (2)$$

と決定される。ただし、ここで $\operatorname{sgn}(\cdot)$ は符号関数であり、

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a > 0 \\ -1 & \text{if } a < 0 \end{cases} \quad (3)$$

である。また、 F および H は正の実数である。

関数 $\phi(p, v) = p_d - p + H(v_d - v)$ を定義すると、状態空間 (p - v 平面) 内において、 $\phi(p, v) = 0$ は超平面（直線）を構成する。この超平面は切替平面と呼ばれ、これを境界として、制御器の出力が不連続に切り替えられる（式 (2)）。この切り替えが無限に高速であれば、この系は切替平面 $\phi(p, v) = 0$ に有限時間内に到達する。そして、切替平面に到達した後は、外力 f と質点の慣性力の合力の大きさが F を超えない限り、系は切

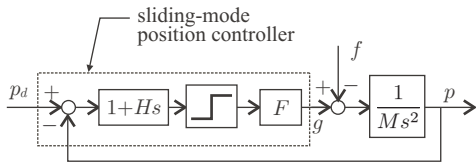


Fig.1 A typical example of sliding mode control system.

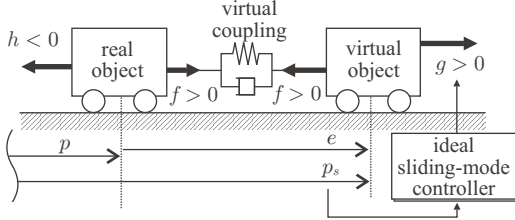


Fig.2 Schematic of the proposed method.

替平面内に拘束される．切替平面内に拘束されている間，制御対象は $\phi(p, v) = 0$ ，すなわち

$$\dot{p} = v = (p_d - p)/H + v_d \quad (4)$$

という微分方程式に従って推移する．この状態を滑り状態 (sliding mode) と呼ぶ．

この方式で，アクチュエータの出力の上限は定数 F として明示的に与えることができる．また，復帰運動時の挙動は定数 H により決定できる．そして，切替が無限に高速であれば，完全な追従性が得られる．しかし，離散時間系では切替に時間遅れが生じるため，切換面交差の繰り返しによって高周波振動 (チャタリング) が発生する．したがって，Fig. 1 の形の制御系は，現実の制御対象には用いることが難しい．

3. 提案手法

Fig. 1 の形の制御系は，現実の制御対象には適用しにくい，仮想的な制御対象を連続時間スライディングモード制御で制御したときの系全体の挙動を，離散時間でシミュレートすることは可能である．そして，その仮想制御対象に追従するように実制御対象を位置制御することも可能である．ここでは，仮想制御対象と実制御対象を高剛性の高ゲインの PD 制御器で接続した系を考える．これは，Fig. 2 のように，実制御対象と仮想制御対象を仮想粘弾性連結要素 (いわゆる virtual coupling [4]) で接続した系であると解釈できる．このブロック線図は Fig. 3 (上) のようになる．

3.1 スライディングモード制御系のモデル

まず，Fig. 2 および Fig. 3 の上図の系を考える．スライディングモード制御器に設定された目標位置および目標速度をそれぞれ p_d および v_d とし，仮想制御対象の位置および速度をそれぞれ p_s および v_s とする．前節と同じ制御則を用いると，スライディングモード制御器の発生力 g は，

$$g = F \text{sgn}(p_d - p_s + H(v_d - v_s)) \quad (5)$$

となる．実制御対象の位置および速度をそれぞれ p および v とすると，PD 制御器 (粘弾性連結要素) の発

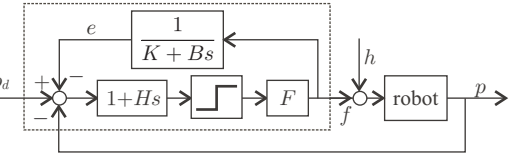
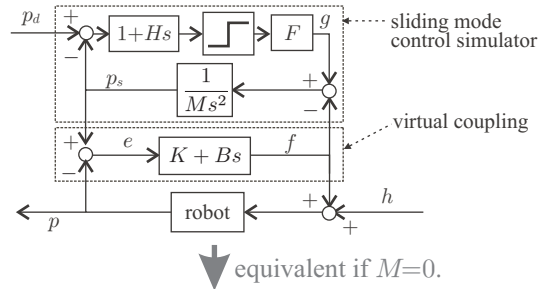


Fig.3 Block diagrams of the proposed method.

生力は

$$f = K(p_s - p) + B(v_s - v) \quad (6)$$

となる．力 f はアクチュエータから出力されるが，その反力は仮想制御対象にも加えられる．したがって，仮想制御対象の運動方程式は下記ようになる．

$$M\ddot{p}_s = g - f \quad (7)$$

ここで，式 (5)(6)(7) に $M = 0$ を代入すると，

$$f = F \text{sgn}(p_d - p - e + H(v_d - v - \dot{e})) \quad (8)$$

$$f = Ke + B\dot{e} \quad (9)$$

$$g = f \quad (10)$$

が得られる．ただし， $e = p_s - p$ である．この系のブロック線図は Fig. 3 (下) のようになる．これは，スライディングモード制御系 (Fig. 1) に局所的なフィードバックを付加した系に等価である．以後，簡単のため，

$$s = (p_d - p) + H(v_d - v) \quad (11a)$$

$$f = F \text{sgn}(s - e - H\dot{e}) \quad (11b)$$

$$f = Ke + B\dot{e} \quad (11c)$$

と表す．これは， p_d, v_d, p および v を入力とし， f を出力とし， e を状態変数とする制御器と解釈できる．

3.2 離散時間表現

式 (11) の離散時間表現は，下記のようになる．

$$s^k = (p_d^k - p^k) + H(v_d^k - v^k) \quad (12a)$$

$$f^k = F \text{sgn}(s^k - e^k - H(e^k - e^{k-1})/T) \quad (12b)$$

$$f^k = Ke^k + B(e^k - e^{k-1})/T \quad (12c)$$

ここで，右肩添字は整数であり，時刻をあらわす．また，時間微分 \dot{e} はオイラー差分 $(e^k - e^{k-1})/T$ に置き換えている．

式 (12) に出現する変数のうち，未知数は f^k と e^k である．これらを求めるためには，式 (12b) と式 (12c) を代数的に解く必要がある．まず，式 (12c) を変形すると

$$e^k = (Be^{k-1} + Tf^k)/(B + KT) \quad (13)$$

が得られる．これを式 (12b) に代入すると， e^k を消去した式が出現する．

$$f^k = F \operatorname{sgn} \left(s^k + \frac{(HK - B)e^{k-1} - (H + T)f^k}{B + KT} \right) \quad (14)$$

ここで，

$$u^k = \frac{(B + KT)s^k + (HK - B)e^{k-1}}{H + T} \quad (15)$$

とすると，式 (14) は下式のようになる．

$$\begin{aligned} f^k &= F \operatorname{sgn} \left(\frac{H + T}{B + KT} (-f^k + u^k) \right) \\ \iff f^k &= F \operatorname{sgn} (-f^k + u^k) \end{aligned} \quad (16)$$

簡単な考察により，代数方程式 (16) は，

$$f^k = \begin{cases} u^k & \text{if } |u^k| \leq F \\ F \operatorname{sgn}(u^k) & \text{if } |u^k| > F \end{cases} \quad (17)$$

と書き直すことができるということが分かる．ただしここで，符号関数 $\operatorname{sgn}(x)$ は $x = 0$ のときに $[-1, 1]$ の任意の値を取りうると仮定している．

式 (17) により f_k が求められれば，式 (13) により e^k が求められる．結局，式 (12) に基づいて値を更新するためには，下記の手順で演算を行えばよい．

$$s^k = (p_d^k - p^k) + H(v_d^k - v^k) \quad (18a)$$

$$u^k = \frac{(B + KT)s^k + (KH - B)e^{k-1}}{H + T} \quad (18b)$$

$$f^k = \begin{cases} u^k & \text{if } |u^k| \leq F \\ F \operatorname{sgn}(u^k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18c)$$

$$e^k = \frac{Be^{k-1} + Tf^k}{B + KT} \quad (18d)$$

この系において制御器は，

$$\phi(p_s^k, v_s^k) = (p_d^k - p_s^k) + H(v_d^k - v_s^k) \quad (19)$$

を有限時間で零に到達させる役割を持つ．式 (19) で $p_s^k = p^k + e^k$ ， $v_s^k = v^k + (e^k - e^{k-1})/T$ を考慮に入れると，

$$\begin{aligned} \phi(p_s^k, v_s^k) &= s^k + \frac{KH - B}{B + KT} e^{k-1} - \frac{H + T}{B + KT} f^k \\ &= \frac{H + T}{B + KT} (u^k - f^k) \end{aligned} \quad (20)$$

が成立する．式 (18c) より， f^k と u^k の符号は常に一致し， f^k の絶対値は u^k の絶対値を超えることがない．したがって， f^k は常に $\phi(p_s^k, v_s^k)$ を零に引き付ける方向に働き， $\phi(p_s^k, v_s^k)$ の符号を逆転させることがない．これは， f^k の存在によって p_s^k が振動的にならないことを意味する．これにより，仮想制御対象が有限時間で滑り状態 ($\phi(p_s, v_s) = 0$) に到達する．厳密にいうと，実制御対象の状態量 (p, v) は滑り平面に到達しない．しかし，実制御対象は仮想制御対象に常に拘束されているので，仮想制御対象が滑り状態にあるとき，系全体

として滑り状態にあると言ってよい．式 (18) において $|u^k| \leq F$ であるとき，この系は滑り状態にある．

式 (18) の手順は $H = \infty$ ， $v_d = 0$ において，筆者らが提案した連続摩擦モデル [2, 3] と等価である．さらに， $B = 0$ ， $H = \infty$ ， $p_d = 0$ ， $v_d = 0$ において Hayward と Armstrong の摩擦モデル [5] と等価である．また， $H = B/K$ とすると，式 (18) は

$$u^k = K(p_d^k - p^k) + B(v_d^k - v^k) \quad (21a)$$

$$f^k = \begin{cases} u^k & \text{if } |u^k| \leq F \\ F \operatorname{sgn}(u^k) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21b)$$

となり，出力トルクの上限を F とした PD 制御と等価である．スライディングモード制御のチャタリングを防ぐために，切替面周囲の不連続性を滑らかにする方法も考えられているが，これは本質的にトルク制限付 PD 制御 (式 (21)) と等価である．

正常動作時の局所的な追従性を保ちつつ，異常動作時の大域的な収束性を保つためには， $H \gg B/K$ と設定するのが望ましい．比例ゲイン K は，正常運転時の追従性を保つために，できるだけ大きく設定するのが望ましい．微分ゲイン B は，発振を防ぎつつ，追従性と即応性を損なわない程度の大きさにとどめるべきである．そして，定数 H が大きいほど異常から復帰する動作が緩やかであり，これが小さすぎると目標軌道近傍でオーバーシュートが発生する．発生トルクの上限值 F は，関節摩擦とリンク慣性に打ち勝つて必要な速度を出すために必要な程度で，かつ，人間や環境に危害を与えない程度の力の大きさの値を設定すればよい．

なお，式 (18) は各変数がベクトルであっても成立するので，容易に多次元に拡張できる．ただしここで，絶対値演算子 $|\cdot|$ はベクトルのノルム $|x| = \sqrt{x^T x}$ として，符号関数 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ はベクトルの正則化関数 $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ として，それぞれ読み替える必要がある．

なお，上記の説明では PD 制御器を用いた手法を導いたが，ほぼ同じ導出過程で PID 制御器を用いた手法を導くことも可能である．

4. 実験

Fig. 4 に示す 2 自由度平行リンクマニピュレータを用いて実験を行った．各関節のアクチュエータはハーモニックドライブギアによって減速された AC サーボモータである．各アクチュエータには光学エンコーダが取り付けられており，手先効果器の位置を計測することができる．手先効果器には 6 軸力センサが取り付けられているが，今回の実験では用いていない．各モータには，出力軸側換算で 10 N·m 程度の摩擦が存在する．

Table 1 に示す 3 種類の制御器 A, B, および C を用いて実験を行った．各制御器は式 (18) の構造を持つ．ただし， p^k, f^k などの各変数は 2 次元ベクトルである．制御器への入力 p^k は，手先効果器の現在位置であり，エンコーダの計測値である．制御器からの出力 f^k は，手先効果器で発生するべき力ベクトルであり，静力学的にそれと等価なトルクがアクチュエータから出力される．各制御器のパラメータ値は Table 1 に示すとおりである．ただし，制御器 A および B は， $H = B/K$ を満たすので，上限付の PD 制御 (式 (21)) に等価で

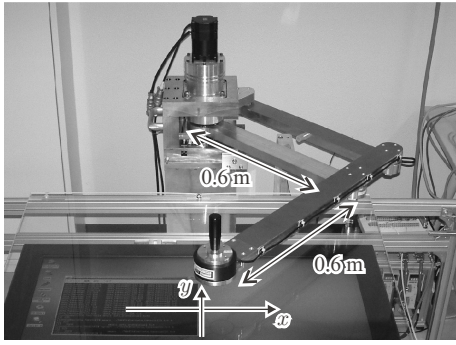


Fig.4 Experimental setup: a parallel-link manipulator.

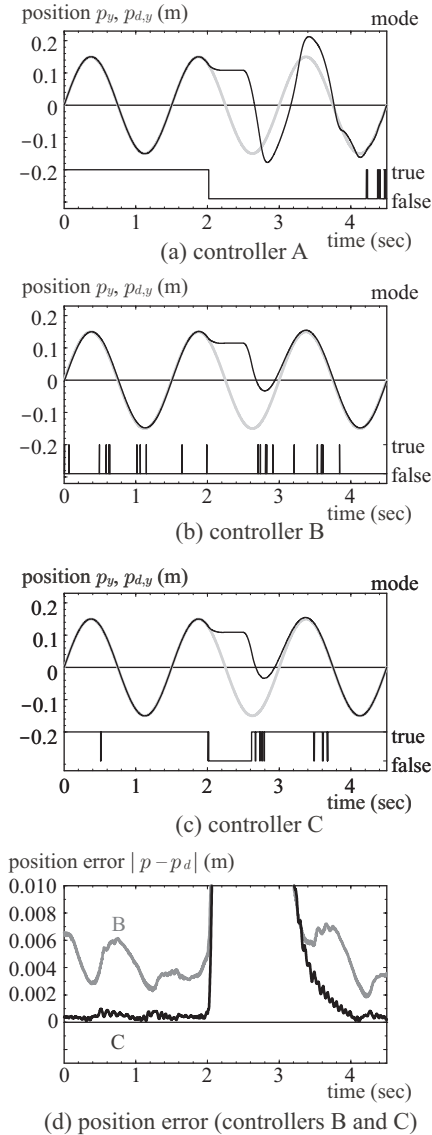


Fig.5 Experimental results.

ある．制御器 C は $H \gg B/K$ を見たす提案手法である．なお，サンプリング周期は $T = 0.001$ sec である．

制御器に入力される目標軌道としては，8の字運動のリサージュ曲線 $p_d(t) = [A_x \sin(\Omega_x t), A_y \sin(\Omega_y t)]^T$ を与えた．ただし， $A_x = 0.25$ m, $A_y = 0.15$ m, $\Omega_x = (2/3)\pi$ rad/sec, $\Omega_y = (4/3)\pi$ rad/sec である．異常からの復帰動作を観察するために，時刻 $t = 2.0$ sec から

Table 1 Parameters for controllers A, B, and C.

parameter (unit)	A	B	C
F (N)	60	60	60
K (N/m)	60000	60000	60000
B (Ns/m)	200	12000	200
H (s)	0.0033	0.2	0.2

2.5 sec の間，アクチュエータへの指令トルクを強制的に零とした．

Fig. 5 に結果を示す．Fig. 5(a) ~ (c) において，灰色の太線は目標位置 p_d の y 成分，黒の細い曲線は手先位置の実測値 p の y 成分を表す．また，各グラフの下部の折れ線は，系が滑り状態にあるか否かを表す．Fig. 5(d) は制御器 B および C を用いたときの，目標位置 p_d と実位置 p の間の偏差である．制御器 A は追従性を重視したゲインを持つトルク制限つき PD 制御であるので，Fig. 5(a) において，復帰運動時に大きなオーバーシュートを生じ，その後の振動の減衰にも時間がかかっている．制御器 B は収束性を重視したゲインを持つトルク制限つき PD 制御であるので，Fig. 5(d) によく表れているとおり，正常運動時に偏差が大きくなっている．またこのとき，指令トルク f が振動的になり（図示せず），高周波の騒音がアクチュエータから発生することが確認できた．制御器 C は提案手法であり，正常動作時の追従性と，復帰動作時の収束性との両立ができていたのが Fig. 5(c) および (d) から分かる．

5. おわりに

今回提案した手法は，単一で線型の切替多様体に限定したものであった．今後，より一般的な系に適用するための枠組みを考える必要がある．また，一般の産業用ロボットは位置指令を受け取る専用制御器が付随し，低レベルの位置制御器へのアクセスが禁じられていることが多い．これらのロボットへの実装も今後の課題である．

謝辞

この研究はトヨタ自動車株式会社の補助を受けて行われている．ここに記して感謝する．また，本研究の遂行にあたり御協力を頂いた，名古屋工業大学の武居直行講師，佐野明人教授，望山洋助教授に感謝いたします．

参考文献

- [1] 野波, 田. スライディングモード制御 非線形ロボット制御の設計理論. コロナ社, 1994.
- [2] 菊植, 藤本. インピーダンス型離散時間摩擦モデル. 第23回日本ロボット学会学術講演会論文集, 2005.
- [3] R. Kikuuwe et al. Fixed-step friction simulation: From classical Coulomb model to modern continuous models. *Proc. of 2005 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2005. to appear.
- [4] J. E. Colgate et al. Issues in the haptic display of tool use. *Proc. of 1995 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 3:140-145, 1995.
- [5] V. Hayward and B. Armstrong. A new computational model of friction applied to haptic rendering. In P. Corke and J. Trevelyan eds., *Experimental Robotics VI*, pp. 404-412. Springer, 2000.