

幾何学的力覚提示アルゴリズムの力学的解釈とインピーダンス型およびアドミッタンス型の実装法

菊 植 亮* 藤 本 英 雄*

Impedance- and Admittance-Type Implementation of Geometric Haptic Rendering Algorithms Based on Mechanistic Interpretation

Ryo Kikuuwe* and Hideo Fujimoto*

Geometric haptic rendering algorithms, in which virtual proxy positions are determined according to input device positions, are widely used for impedance-type haptic rendering. Such methods are intuitively simple because they reduce mechanistic problems of determining reaction forces into geometric problems of updating proxy positions. Aiming to extend the scope of application of geometric haptic algorithms, this paper presents a mechanistic interpretation of geometric algorithms and proposes two techniques. One is a technique to combine geometric algorithms and viscous damping in impedance-type haptic rendering. The other is a technique to utilize geometric algorithms in admittance-type haptic rendering. The results of implementation experiments are presented.

Key Words: Haptic Rendering, Damping, Proxy, Impedance, Admittance

1. はじめに

近年様々な力覚提示装置が開発されているが、それらを用いた力覚提示の方式は、インピーダンス型とアドミッタンス型の2種類に大別できる。インピーダンス型力覚提示では、ツール（力覚提示装置の把持部）の位置がエンコーダなどで測定され、それに応じてアクチュエータの発生力が決定される。この方式は、力センサを持たない軽量の力覚提示装置（SensAble社のPhantomなど）に適している。それに対してアドミッタンス型力覚提示では、ツールに取り付けられた力センサの測定値を入力として計算機内部の仮想ツールの運動が計算され、その運動に追従するようにツールの位置が制御される。この方式は装置の関節摩擦や慣性を高剛性の位置制御で抑え込むことができるため、比較的大型であるか、あるいは関節摩擦が大きい力覚提示装置（文献[1]~[3]など）に適している。

インピーダンス型とアドミッタンス型のいずれの方式においても、形状が複雑な仮想物体を矛盾なく扱うことは難しい問題である。インピーダンス型力覚提示においては、Fig. 1のように、仮想空間内に「プロキシ」(proxy)と呼ばれる仮想物体を想定する方法がよく用いられる。プロキシはツールと「仮想連結」(仮想的なバネ要素, virtual coupling)によって結合されており、ツールとともに仮想空間内を移動するが、ツールが仮

想物体内に入ったときには仮想物体の表面にとどまる。また、1ステップ時間内のプロキシの移動距離を制限することで、仮想物体表面の摩擦力を表現することもできる。この方法によって、反力を決定する力学的な問題は、プロキシの位置を更新する幾何学的な問題に置き換えられる。

力学的な問題を幾何学的な問題に置き換えることによって、力という物理量を考慮せずに力覚提示のアルゴリズムを設計することが可能になる。これは、特に開発者（プログラマ）にとって都合が良い。しかし、この方法ではツールを支配する動特性を設計するのが難しく、少なくとも次の二つの問題が存在する。第一の問題は、インピーダンス型力覚提示においては、仮想連結が粘性ダンピングを含まない純粋な弾性要素であるため、装置が振動的あるいは不安定になりやすいという点である。第二の問題は、アドミッタンス型力覚提示においては、力の測定値が入力であるために幾何学的なアルゴリズムは利用しにくいという点である。

本論文では、力覚提示における幾何学的アルゴリズムの応用範囲の拡大を目的とする。このためにまず、幾何学的アルゴリ

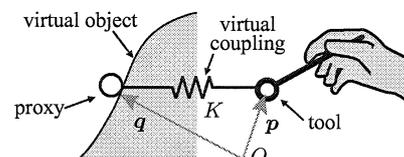


Fig. 1 Impedance-type haptic rendering using a proxy

原稿受付 2006年8月2日

*名古屋工業大学

*Nagoya Institute of Technology

ズムの力学的な解釈を示す．そしてその解釈に基づいて，上記の二つの問題点に対する解決策を与える．すなわち，インピーダンス型力覚提示において幾何学的アルゴリズムと粘性ダンピングとを両立させて用いる方法と，アドミッタンス型力覚提示において幾何学的アルゴリズムを用いる方法を提案する．ここでの幾何学的アルゴリズムとは結局のところ，位置を入力とし位置を出力とする関数として表現される．この関数は，入力位置 (Fig. 1 ではツール位置 p) に対して，出力位置 (Fig. 1 ではプロキシ位置 q) を仮想空間内の拘束が満たされるように決定する．上記の二つの問題点は，力覚提示のソフトウェアの中でこの関数に適切な入力を与え，その出力を適切に利用することで解決できる．提案手法によって，インピーダンス型とアドミッタンス型のいずれの方式においても幾何学的なアルゴリズムを用いることができるようになり，提示装置に依存しない共通した形式で仮想空間を記述できるようになる．

以下本論文では，まず第 2 章において，従来インピーダンス型力覚提示で用いられてきた幾何学的アルゴリズムを概説し，その問題点と限界を述べる．次に第 3 章において，幾何学的アルゴリズムの力学的意味を明らかにした上で，仮想連結に粘性ダンピングを含ませるための方法と，アドミッタンス型力覚提示に適用するための方法とを示す．第 4 章において実験結果を示し，最後に第 5 章でまとめを記す．

2. 幾何学的な力覚提示アルゴリズム

2.1 プロキシを用いたインピーダンス型力覚提示

プロキシの概念を用いたインピーダンス型力覚提示の方法は，まず Zilles と Salisbury [4] によって提案された．彼らはツールの代理となる点状物体を仮想空間内に想定し，それを「god object」と呼んだ．Ruspini ら [5] はこの方法を拡張し，仮想物体の表面の変形やテクスチャ，あるいは摩擦などを提示する手法を提案した．彼らはその仮想物体をプロキシと呼び，以後，この呼称がよく用いられるようになった．

以下の議論では，プロキシは大きさを持たない点状の物体であると仮定し，仮想空間は n 次元の直交座標系であるとする．従来のプロキシを用いた力覚提示法の多くは，下記のような形式で表すことができる．

$$q(k) = \mathcal{G}(K, p(k), q(k-1)) \quad (1a)$$

$$f(k) = K(q(k) - p(k)) \quad (1b)$$

ここで， k は離散時間のインデックス， $p \in \mathbb{R}^n$ はツールの位置， $q \in \mathbb{R}^n$ はプロキシの位置を表す．また， $K > 0$ は仮想連結のバネ定数を表す．関数 $\mathcal{G} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は位置情報を入力とする幾何学的なアルゴリズムを表す．この関数は，現在のツール位置 $p(k)$ と 1 ステップ時間前のプロキシ位置 $q(k-1)$ を入力とし，現在のプロキシ位置 $q(k)$ を出力とする．関数 \mathcal{G} 内の演算にバネ定数 K が用いられることもあるので， K も関数 \mathcal{G} の引数としている．力覚提示装置のアクチュエータ発生力 $f(k) \in \mathbb{R}^n$ は，式 (1b) に示されているように，ツールとプロキシとの間の位置関係によって決定される．

単純な例として，原点を含み $n \in \mathbb{R}^n$ ($\|n\| = 1$) を外向き法線ベクトルとする物体表面による片側拘束を考えよう．この

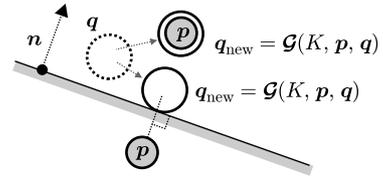


Fig. 2 Unilateral constraint by a frictionless flat surface

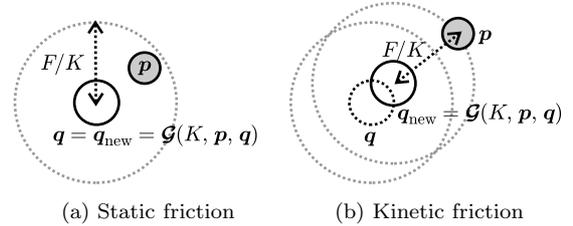


Fig. 3 Isotropic Coulomb friction

とき，関数 \mathcal{G} は下記ようになる．

$$\mathcal{G}(K, p, q) = \begin{cases} p & \text{if } n^T p > 0 \\ p - n n^T p & \text{if } n^T p \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

この定義の関数 \mathcal{G} を用いたとき， p ， q ，および $q_{\text{new}} = \mathcal{G}(K, p, q)$ の関係は，Fig. 2 のようになる．ツール位置 p が物体外部にある場合 (すなわち $n^T p > 0$ の場合)，更新後プロキシ位置 q_{new} はツール位置 p と一致する．位置 p が物体外部にある場合，位置 q_{new} は位置 p の物体表面への正射影となり，プロキシは物体表面にとどまることになる．

他の例として，下記のように関数 \mathcal{G} を定義すると，等方的なクーロン摩擦力を表現できる [6] [7]．

$$\mathcal{G}(K, p, q) = \begin{cases} q & \text{if } \|p - q\| \leq F/K \\ p - \frac{F}{K} \frac{p - q}{\|p - q\|} & \text{if } \|p - q\| > F/K \end{cases} \quad (3)$$

ここで， $F > 0$ は動摩擦力と最大静止摩擦力の大きさを表す．この定義の関数 \mathcal{G} を幾何学的に表すと，Fig. 3 のようになる．このとき，ツール位置 p と 1 ステップ時間前のプロキシ位置 q の距離がある値 F/K 以下であればプロキシは動かず，そうでなければ，プロキシ位置 q_{new} はツール位置 p から距離 F/K を保ってツール位置 p に追従する．

さらに， n を外向き法線ベクトルとし，原点を含み，かつ，摩擦係数が $\mu > 0$ である物体表面による片側拘束を考えると，関数 \mathcal{G} は下記ようになる．

$$\mathcal{G}(K, p, q) = \begin{cases} p & \text{if } n^T p > 0 \\ q_{\text{sf}} & \text{if } n^T p \leq 0 \wedge \|p_{\text{sf}} - q_{\text{sf}}\| \leq -\mu n^T p \\ p_{\text{sf}} + \mu n^T p \frac{p_{\text{sf}} - q_{\text{sf}}}{\|p_{\text{sf}} - q_{\text{sf}}\|} & \text{if } n^T p \leq 0 \wedge \|p_{\text{sf}} - q_{\text{sf}}\| > -\mu n^T p \end{cases} \quad (4a)$$

ただし，

$$p_{\text{sf}} = p - n n^T p \quad (4b)$$

$$q_{\text{sf}} = q - n n^T q \quad (4c)$$

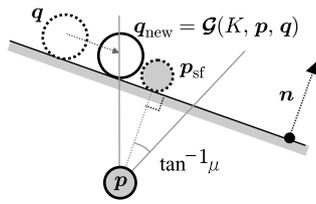


Fig. 4 Unilateral constraint by a frictional flat surface

である。この定義の関数 \mathcal{G} を用いると、Fig. 4 のように、プロクシの位置は摩擦円錐内にとどまるように更新される。

以上の三例はいずれも極めて単純であるが、仮想環境での相互作用を記述する基本的な要素を含んでいる。形状が複雑な仮想物体を力覚提示するとき、プロクシの位置を決定するためのアルゴリズムは一般に単純ではない。計算量を節約しながら矛盾のない現実感のある力覚提示を行うことを目的として、様々な方法が試みられている [8]~[10]。いずれの手法も、1 ステップ時間前のプロクシ位置 $\mathbf{p}(k-1)$ と現在のツール位置 $\mathbf{p}(k)$ からプロクシ位置を更新するという手順は共通しており、式 (1a) の関数 \mathcal{G} の形で表すことができる。このように、反力決定という本来は力学的な問題に対して、幾何学的な考察からアルゴリズムを設計できるという点は、開発者にとって好都合であるといえる。

2.2 幾何学的アルゴリズムの限界と問題点

インピーダンス型力覚提示において式 (1) を用いると、ダンピングを含まない弾性力が力覚提示装置から発生することになる。通常、提示装置の振動を抑えて安定性を保つためには、速度に比例する粘性力が必要である。関数 \mathcal{G} によって幾何学的に決定された反力と、速度に比例する粘性ダンピングを、整合性のある形で組み合わせる問題は単純ではない。例えば、式 (1) を下式で置き換える方法を考えてみよう。

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(K, \mathbf{p}(k), \mathbf{q}(k-1)) \quad (5a)$$

$$\mathbf{f}(k) = K(\mathbf{q}(k) - \mathbf{p}(k)) + B(\nabla \mathbf{q}(k) - \nabla \mathbf{p}(k))/T \quad (5b)$$

ここで ∇ は後退差分演算子であり、 $\nabla x(k) \triangleq x(k) - x(k-1)$ である。また、 $B > 0$ は粘性係数を表し、 T はステップ時間を表す。この計算方法は、例えば文献 [10] に示されている。この式を用いると、プロクシ位置とツール位置の幾何学的関係が反力 $\mathbf{f}(k)$ へ正確に反映されないことになる。例えば、仮想物体表面に触れているツールをその表面から引き離す際には、粘性項がツールを物体表面へ引き付ける方向の力を発生し、ツールが物体表面に吸着されるような不自然な現象を生むことがある [11] [12]。

なお、例えば文献 [8] で用いられているように、式 (1) を

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(K, \mathbf{p}(k), \mathbf{q}(k-1)) \quad (6a)$$

$$\mathbf{f}(k) = K(\mathbf{q}(k) - \mathbf{p}(k)) - B\nabla \mathbf{p}(k)/T \quad (6b)$$

に置き換えることもできる。この式は接地された仮想ダンパをプロクシに接続した状況を表し、使用者は仮想物体に接触していないときにも粘性抵抗を感じるようになる。これは力学的に

は整合性があるが、仮想空間内での使用者の自由な動作を阻害するため望ましくない。

一方、アドミッタンス型力覚提示では力センサの測定値が入力となるため、式 (1) とはまったく異なった計算手順が必要である。この場合は、計算機の内部にツールの代理となる仮想物体を想定し、力センサからの入力に応じてその仮想物体の運動を計算する必要がある。ここでの仮想物体は第 2.1 節の議論におけるプロクシによく似ているが、それは零でない質量 M を持つ必要がある（以下、アドミッタンス型力覚提示の場合においても、ツールの代理となる仮想物体をプロクシと呼ぶことにする）。使用者から力センサに加えられた力を $\mathbf{h}(k)$ とし、仮想環境からプロクシに加わる力を $\mathbf{f}(k)$ とすると、プロクシの位置 $\mathbf{q}(k)$ は下記の運動方程式によって更新される。

$$M\nabla^2 \mathbf{q}(k)/T^2 = \mathbf{h}(k) + \mathbf{f}(k) \quad (7)$$

ここで ∇^2 は $\nabla^2 x(k) = \nabla x(k) - \nabla x(k-1)$ を表し、左辺の $\nabla^2 \mathbf{q}(k)/T^2$ はプロクシの加速度を表す。実際のツールの位置はプロクシの位置 $\mathbf{q}(k)$ に追従するように位置制御されるため、この式には現れない。また、仮想環境からの力 $\mathbf{f}(k)$ は、通常の場合は、過去のプロクシの運動によって決定される。結局、関数 \mathcal{G} を用いた幾何学的な計算はアドミッタンス型力覚提示では直接用いることができない。

3. 提 案

3.1 幾何学的アルゴリズムの力学的解釈

ここでは、式 (1) で表される従来の幾何学的な力覚提示方法の力学的な意味を考える。

まず、式 (1b) より $\mathbf{p}(k) = \mathbf{q}(k) - \mathbf{f}(k)/K$ が得られ、これを式 (1a) に代入すると、下式が得られる。

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(K, \mathbf{q}(k) - \mathbf{f}(k)/K, \mathbf{q}(k-1)) \quad (8)$$

この式は、 $\mathbf{q}(k)$ 、 $\mathbf{q}(k-1)$ 、および $\mathbf{f}(k)$ の間に存在する代数拘束を表している。プロクシの質量は零であるので、プロクシに加わる力の総和は常に零となる。仮想連結からプロクシに加わる力は $-\mathbf{f}(k)$ であるので、それ以外の力、すなわち仮想環境側からプロクシに加わる力の総和は $\mathbf{f}(k)$ となる。したがってプロクシは、位置が $\mathbf{q}(k)$ 、速度が $\nabla \mathbf{q}(k)/T = (\mathbf{q}(k) - \mathbf{q}(k-1))/T$ であるとき、式 (8) を満たす力 $\mathbf{f}(k)$ を仮想環境から受けることになる。この式 (8) は、プロクシが仮想環境から受ける力学的な拘束を表す式であると解釈できる。

式 (8) は仮想連結のバネ定数 K を含んでいるが、ここで下記の仮定を設ける。

$$\begin{aligned} \exists K > 0, \mathbf{q}_n = \mathcal{G}(K, \mathbf{q}_n - \mathbf{f}/K, \mathbf{q}) \\ \iff \forall \kappa > 0, \mathbf{q}_n = \mathcal{G}(\kappa, \mathbf{q}_n - \mathbf{f}/\kappa, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (9)$$

この式は、式 (8) が K に依存しないことを意味する。この仮定が成立することは一般に保証されないが、後に述べる理由により、関数 \mathcal{G} の定義が力学的に妥当であれば、式 (9) が成立すると考えられる。

式 (9) の仮定の下で、下式を満たす関数 $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

を定義する.

$$\forall \kappa > 0, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{f} = \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \iff \mathbf{q} = \mathcal{G}\left(\kappa, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{f}}{\kappa}, \mathbf{q} - T\mathbf{v}\right) \quad (10)$$

なお, 式 (10) は下式と等価である.

$$\forall \kappa > 0, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{G}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{r} \iff \mathcal{M}\left(\mathbf{r}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{q}}{T}\right) = \kappa(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad (11)$$

この関数 \mathcal{M} を用いると, 式 (8) は

$$\mathbf{f}(k) = \mathcal{M}(\mathbf{q}(k), \nabla \mathbf{q}(k)/T) \quad (12)$$

と等価になる. この式で関数 \mathcal{M} は, プロキシの運動 (位置 $\mathbf{q}(k)$) および速度 $\nabla \mathbf{q}(k)/T$) を入力として, プロキシが仮想環境から受ける力 $\mathbf{f}(k)$ を出力とする, インピーダンス要素として表記されている. しかし一般に, 関数 \mathcal{M} は一価関数であることも全域関数であることも保証されない (すなわち, 任意の $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ および $\forall \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{f} = \mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ が一意に存在するとは限らない). この意味で, 関数 \mathcal{M} はいわば「不完全な」インピーダンス要素であるといえる.

関数 \mathcal{M} を導入することにより, 式 (1) は

$$\mathbf{f}(k) = \mathcal{M}(\mathbf{q}(k), \nabla \mathbf{q}(k)/T) \quad (13a)$$

$$\mathbf{f}(k) = K(\mathbf{q}(k) - \mathbf{p}(k)) \quad (13b)$$

と書き直すことができる. これは, 二つの未知数 $\mathbf{f}(k)$ と $\mathbf{q}(k)$ を支配する二つの代数拘束を表した連立方程式である. 前述のように式 (13a) は, 仮想環境に起因する代数拘束を表す. 一方で式 (13b) は仮想連結に起因する代数拘束を表す. 式 (13a) およびそれと等価な式 (8) は仮想環境に起因する代数拘束を表すので, それが仮想連結のバネ定数 K に依存しないという式 (9) の仮定は力学的に妥当であるといえる. また, 関数 \mathcal{M} は多価関数であるので式 (13a) から $\mathbf{f}(k)$ を一意に決定することはできない. しかし, 式 (13) 全体としては式 (1) と等価になるので, 入力 $\mathbf{p}(k)$ に応じて出力 $\mathbf{f}(k)$ を一意に決定できる.

入出力を明確にするために式 (13) をブロック線図で表すと Fig. 5 のようになる. 仮想連結に起因する代数拘束, すなわち式 (13b) は, 関数 \mathcal{M} を囲む時間遅れのないフィードバックとして表現される. 式 (13) と式 (1) のそれぞれをブロック線図で対比して表すと, Fig. 6 になる. このブロック線図表現は, 不完全インピーダンス要素 \mathcal{M} の入出力を時間遅れのないフィードバックループによって閉じることで, 一意な入出力関係を持つ力覚提示アルゴリズムを構成できることを示している.

3.2 不完全インピーダンス要素 \mathcal{M} の例

ここでは, 第 2.1 節で挙げた三つの関数 \mathcal{G} のそれぞれに対応する関数 \mathcal{M} を示す. まず, 片側拘束の例 (Fig. 2 および式 (2)) を考えよう. このとき, 仮想環境からプロキシに加わる力 \mathbf{f} とプロキシの位置 \mathbf{q} は, 下式を満たす.

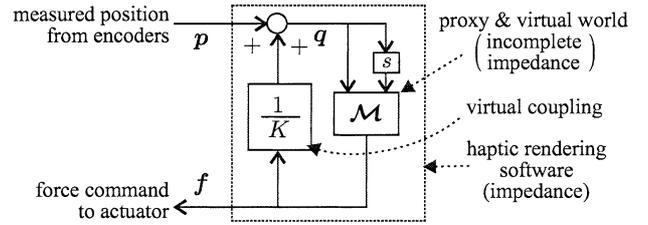


Fig. 5 Impedance-type haptic rendering

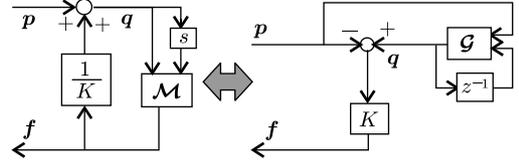


Fig. 6 Block-diagram representations of eq.(13), left, and eq.(1), right

$$(\mathbf{f} = \mathbf{o} \wedge \mathbf{n}^T \mathbf{q} > 0) \vee (\|\mathbf{f}\| = \mathbf{n}^T \mathbf{f} \wedge \mathbf{n}^T \mathbf{q} = 0) \quad (14)$$

ここで, \mathbf{o} は適切な次元の零ベクトルを表す. この例では, $\mathbf{n}^T \mathbf{q} = 0$ のときに \mathbf{f} の値が一意に決まらない. しかしこの例においても, 関数 \mathcal{M} を

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{cases} = \mathbf{o} & \text{if } \mathbf{n}^T \mathbf{q} > 0 \\ \in \{\mathbf{f} \mathbf{n} \mid \mathbf{f} > 0\} & \text{if } \mathbf{n}^T \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

という形で表記することによって, 式 (14) を $\mathbf{f} = \mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ と表現することができる.

また, 等方性クーロン摩擦 (Fig. 3 および式 (3)) において \mathbf{f} および $\dot{\mathbf{q}}$ の間に存在する拘束は,

$$(\mathbf{f} = -F\dot{\mathbf{q}}/\|\dot{\mathbf{q}}\| \wedge \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{o}) \vee (\|\mathbf{f}\| \leq F \wedge \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{o}) \quad (16)$$

となる. これを $\mathbf{f} = \mathcal{M}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$ という不完全インピーダンス表現で表すと,

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{cases} = -F\dot{\mathbf{q}}/\|\dot{\mathbf{q}}\| & \text{if } \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{o} \\ \in \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{f}\| \leq F\} & \text{if } \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{o} \end{cases} \quad (17)$$

となる.

さらに, 摩擦のある平面による片側拘束 (Fig. 4 および式 (4)) の不完全インピーダンス表現は,

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{cases} = \mathbf{o} & \text{if } \mathbf{n}^T \mathbf{q} > 0 \\ \in \left\{ \mathbf{f} \left(\mathbf{n} - \mu \frac{N N^T \dot{\mathbf{q}}}{\|N^T \dot{\mathbf{q}}\|} \right) \mid \mathbf{f} > 0 \right\} & \text{if } \mathbf{n}^T \mathbf{q} = 0 \wedge N^T \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{o} \\ \in \{ \mathbf{f}(\mathbf{n} - \mu \mathbf{t}) \mid \mathbf{f} > 0, \mathbf{t}^T \mathbf{n} = 0, \|\mathbf{t}\| \leq 1 \} & \text{if } \mathbf{n}^T \mathbf{q} = 0 \wedge N^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{o} \end{cases} \quad (18a)$$

となる. ただしここで N は,

$$\mathbf{I} = N N^T + \mathbf{n} \mathbf{n}^T, \quad N^T \mathbf{n} = \mathbf{o} \quad (18b)$$

を満たす列フルランクな行列であり、 \mathbf{I} は適切な次元の単位行列を表す。式 (18) は、位置が物体表面上にあって速度が非零であるときには、速度と反対方向で摩擦円錐表面にある任意の力を出力する。また、位置が物体表面上にあって速度がゼロであるときには、摩擦円錐内の任意の力を出力する。

なお、上記の三つの例は、下記の二つの関数の組み合わせで表現できる。

$$\text{dio}(x) \begin{cases} = 0 & \text{if } x > 0 \\ \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{sgn}(x) \begin{cases} = x/\|x\| & \text{if } x \neq \mathbf{o} \\ \in \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\} & \text{if } x = \mathbf{o} \end{cases} \quad (20)$$

関数 dio は、入力を電圧、出力を電流としたときの理想的なダイオード特性を表す。また、関数 sgn は符号関数（理想リレー要素）の多次元版である。これらを用いると、式 (15)、(17)、(18) はそれぞれ

$$\mathcal{M}(q, \dot{q}) = n \text{dio}(n^T q) \quad (21)$$

$$\mathcal{M}(q, \dot{q}) = -F \text{sgn}(\dot{q}) \quad (22)$$

$$\mathcal{M}(q, \dot{q}) = (n - \mu N \text{sgn}(N^T \dot{q})) \text{dio}(n^T q) \quad (23)$$

と簡潔に表すことができる。上記の関数 \mathcal{M} と式 (2)、式 (3)、および式 (4) の関数 \mathcal{G} との対応関係は、関数 dio および関数 sgn の下記の性質を利用すると導出できる。

定理 1. 二つの実数 x および y について、下式が成立する。

$$y = \text{dio}(x + y) \iff y = \max(0, -x)$$

証明. $y = \text{dio}(x + y) \iff (y = 0 \wedge x + y > 0) \vee (y \geq 0 \wedge x + y = 0) \iff (y = 0 \wedge x > 0) \vee (y = -x \wedge x \leq 0) \iff y = \max(0, -x) \quad \square$

定理 2. 二つの n 次元ベクトル x および y について、下式が成立する。

$$y = \text{sgn}(x - y) \iff y = x / \max(\|x\|, 1)$$

証明. まず、

$$\mathcal{A} \triangleq (y = (x - y) / \|x - y\| \wedge x \neq y)$$

$$\mathcal{B} \triangleq (y = x \wedge \|y\| \leq 1)$$

と定義すると、 $y = \text{sgn}(x - y) \iff (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ が成り立つ。ここで、 \mathcal{A} が成立すると仮定する。 $r = \|x - y\| > 0$ を定義すると、 $(1+r)y = x$ が成り立ち、 $\|y\| = 1$ より $\|x\| = 1+r$ が成り立つ。これより、 $\|x\| > 1$ が得られ、 $\|x\| = 1+r$ を $(1+r)y = x$ に代入すると $y = x/\|x\|$ が得られる。したがって、

$$\mathcal{A} \Rightarrow (y = x/\|x\| \wedge \|x\| > 1)$$

となる。上式の逆は自明であり、 $\mathcal{B} \iff (y = x \wedge \|x\| \leq 1)$ も自明である。したがって、 $y = \text{sgn}(x - y) \iff (y = x/\|x\| \wedge \|x\| > 1) \vee (y = x \wedge \|x\| \leq 1) \iff y = x / \max(\|x\|, 1)$ が

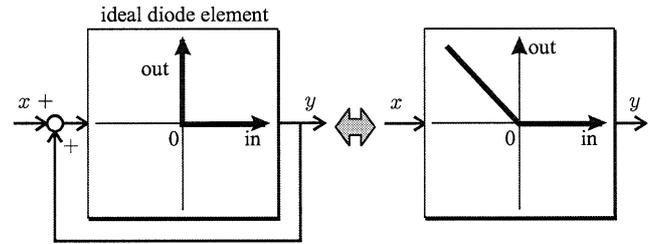


Fig. 7 Block-diagram representation of Theorem 1

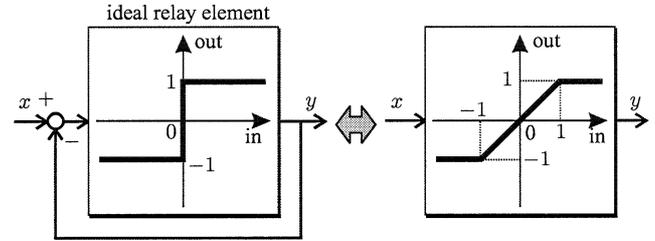


Fig. 8 Block-diagram representation of Theorem 2

得られる。 \square

式 (21) および式 (22) の関数 \mathcal{M} については、対応する関数 \mathcal{G} の導出は簡単である。式 (23) の関数 \mathcal{M} から式 (4) の関数 \mathcal{G} への導出方法は付録 A に示す。なお、上記の二つの定理をブロック線図で表現するとそれぞれ Fig. 7 および Fig. 8 のようになる。これらのブロック線図表現は、Fig. 6 と同様に、全域一価関数ではない不完全な要素の入出力を時間遅れのないフィードバックループで閉じることで、連続で完全な要素を作ることができることを示している。

関数 \mathcal{G} がより複雑な計算手順を含んでいるとき、それに対応する関数 \mathcal{M} を導くのは容易ではない。しかし、関数 \mathcal{M} は幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} に力学的な意味付けを与えるためのものであり、実際の演算に必要なものではない。

3.3 インピーダンス型力覚提示における幾何学的アルゴリズムとダンピング

式 (13) は仮想環境と仮想連結という二つのシステムを分離して表現しているので、式 (13b) に粘性項を追加して

$$f(k) = \mathcal{M}(q(k), \nabla q(k)/T) \quad (24a)$$

$$f(k) = K(q(k) - p(k)) + B(\nabla q(k) - \nabla p(k))/T \quad (24b)$$

という式を作ることによって、幾何学的、力学的に整合性のある粘性ダンピングを仮想連結に含ませることができる。

式 (24) は $f(k)$ と $q(k)$ とを未知数とする連立方程式であるが、これは単純な解析解を持つ。まず、式 (24b) は下式と等価である。

$$f(k) = (K + B/T)(q(k) - \hat{p}(k)) \quad (25)$$

ただしここで、

$$\hat{p}(k) = p(k) + \frac{B(q(k-1) - p(k-1))}{KT + B} \quad (26)$$

である。式 (25) を式 (24a) に代入すると

$$(K + B/T)(\mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k)) = \mathcal{M}(\mathbf{q}(k), \nabla \mathbf{q}(k)/T) \quad (27)$$

となる．式 (11) が成立することを考慮すると，式 (27) は下式と等価になる．

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(K + B/T, \hat{\mathbf{p}}(k), \mathbf{q}(k-1)) \quad (28)$$

すなわち，式 (24) の解析解は，下記の計算手順で得られる

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = \mathbf{p}(k) + \frac{B(\mathbf{q}(k-1) - \mathbf{p}(k-1))}{KT + B} \quad (29a)$$

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(K + B/T, \hat{\mathbf{p}}(k), \mathbf{q}(k-1)) \quad (29b)$$

$$\mathbf{f}(k) = (K + B/T)(\mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k)) \quad (29c)$$

上記の計算手順は，プロクシを用いた力覚提示の基本式 (1) において， $\mathbf{p}(k)$ を $\hat{\mathbf{p}}(k)$ に， K を $K + B/T$ にそれぞれ置き換えたものである．

式 (29) の実装法では，算出された位置 $\hat{\mathbf{p}}(k)$ に基づいてプロクシ位置 $\mathbf{q}(k)$ が幾何学的に決定される．そして，位置 $\hat{\mathbf{p}}(k)$ と位置 $\mathbf{q}(k)$ との幾何学的関係から反力が決定されるが，決定された反力にはすでに粘性ダンピングが含まれている．すなわち，式 (29) は陰的に (implicit に) ダンピングを含んでおり，開発者は速度フィードバックの影響を意識せずに，幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} を用いることができる．従来研究の幾何学的な力覚提示則は関数 \mathcal{G} という形で表すことができれば，そのまま式 (29) で用いることができる．

なお，式 (3) の関数 \mathcal{G} を式 (29) に代入すると，筆者らが既報で提案したインピーダンス型離散時間摩擦モデル [13] [14] と等価になる．

3.4 幾何学的アルゴリズムを用いたアドミッタンス型力覚提示

第 3.1 節の議論によって，プロクシが仮想環境から受ける力学的拘束が関数 \mathcal{M} を用いて表せるようになり，この関数 \mathcal{M} と，幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} との関係が明らかになった．これにより，幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} をアドミッタンス型力覚提示にも用いることが可能になる．

アドミッタンス型力覚提示では，使用者が力覚提示装置に加える力 \mathbf{h} が力センサによって計測され，それに基づいて計算機内に記憶されたプロクシの位置が更新される．ここでは，プロクシは非零の質量 M を持つので，プロクシの運動方程式の離散時間表現は

$$M\nabla^2 \mathbf{q}(k)/T^2 = \mathbf{h}(k) + \mathcal{M}(\mathbf{q}(k), \nabla \mathbf{q}(k)/T) \quad (30)$$

となる．このシステムをブロック線図で表すと Fig. 9 となる．力覚提示装置の入出力はインピーダンス型力覚提示 (Fig. 5) の逆であるが，仮想環境はインピーダンス型力覚提示の場合と同じく不完全インピーダンス要素 \mathcal{M} で表現できる．力覚提示装置は，ツールの位置がプロクシの位置 $\mathbf{q}(k)$ に追従するように位置制御される．

式 (30) は，下式と等価である．

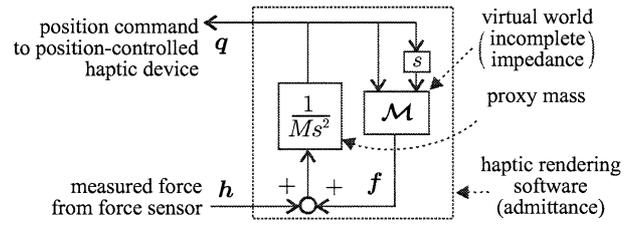


Fig. 9 Admittance-type haptic rendering

$$(M/T^2)(\mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{p}}(k)) = \mathcal{M}(\mathbf{q}(k), \nabla \mathbf{q}(k)/T) \quad (31a)$$

ただし

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = 2\mathbf{q}(k-1) - \mathbf{q}(k-2) + T^2\mathbf{h}(k)/M \quad (31b)$$

である．式 (11) を用いて，式 (31) は下記のように書き直すことができる．

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = 2\mathbf{q}(k-1) - \mathbf{q}(k-2) + T^2\mathbf{h}(k)/M \quad (32a)$$

$$\mathbf{q}(k) = \mathcal{G}(M/T^2, \hat{\mathbf{p}}(k), \mathbf{q}(k-1)) \quad (32b)$$

すなわち，アドミッタンス型力覚提示の場合も，式 (32a) の $\hat{\mathbf{p}}(k)$ を関数 \mathcal{G} の引数として代入することによって，幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} をそのまま用いることができる．

なお，式 (3) の定義の関数 \mathcal{G} を式 (32) に代入すると，筆者らが既報で提案したアドミッタンス型離散時間摩擦モデル [14] [15] と等価になる．

4. 実装

式 (29) および式 (32) の提案手法を用いて実験を行った．インピーダンス型力覚提示のためには，SensAble 社の力覚提示装置「PHANTOM Desktop」を用いた．Fig. 10 にその写真と座標系を示す．この装置は三つのアクチュエータによって 3 自由度の力覚提示が可能であり，各関節に取り付けられたエンコーダによってツールの位置が測定される．一方，アドミッタンス型力覚提示のためには，Fig. 11 に示すパラレルマニピュレータを用いた．この装置は二つの AC サーボモータによって平面 2 自由度の力覚提示が可能であり，操作者がツールに加える力はツールに装着された力センサ (ニッタ (株) 製) によって測定される．

4.1 実験 1：インピーダンス型力覚提示

Fig. 10 の装置を用いて， y 軸に垂直で原点を通る仮想平面のインピーダンス型力覚提示を行った．なお，仮想平面の摩擦係数は $\mu = 0.3$ とした．このとき関数 \mathcal{G} の定義は式 (2) のようになるが，これを下記の三通りの方法で実装した．

- 実装法 A：式 (1)：仮想ダンパを用いない方法．
- 実装法 B：式 (5)：プロクシ位置の更新方法は従来のままで，仮想連結に粘性を含ませる方法．
- 実装法 C：式 (29)：提案手法．

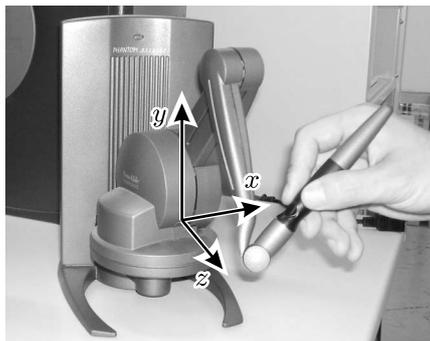


Fig. 10 Experimental setup for impedance-type haptic rendering (Phantom Desktop, SensAble Technologies Inc.)

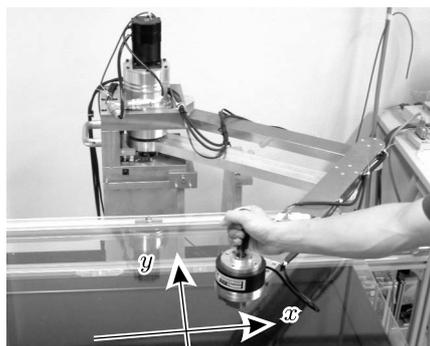


Fig. 11 Experimental setup for admittance-type haptic rendering

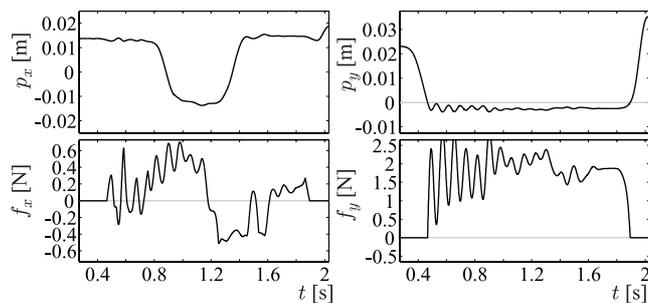
ここで、 $T = 0.001$ [s], $K = 750$ [N/m], $B = 8$ [Ns/m] とした。なお、ツール位置の測定値は、カットオフ周波数 30 [Hz] の 1 次低域通過フィルタによって平滑化した。

実験では、ツールを仮想平面に押し付け、そのまま x 方向に一往復させ、その後ツールを仮想平面から ($+y$ 方向に) 離脱させるという一連の動作を行った。このときのツール位置 \mathbf{p} とアクチュエータの発生力 \mathbf{f} の x 成分と y 成分を **Fig. 12** に示す。実装法 A においては、仮想平面に接触している間 ($p_y \leq 0$ である間)、ツール位置 \mathbf{p} とアクチュエータの発生力 \mathbf{f} が振動的になっている。それに対して実装法 B および C においては、仮想平面との衝突の直後の振動が即座に減衰しており、粘性によるダンピングが適切に働いていることが分かる。

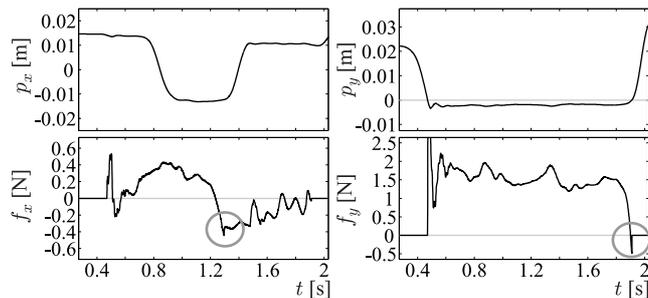
実装法 B と実装法 C の間の相違は、**Fig. 12** (b) および (c) の中の灰色の円で囲まれた部分に現れている。実装法 B では、仮想平面から離脱する際にパルス状の $-y$ 方向の力 (吸着力) が生じている。また、摩擦力の方向が反転した直後も x 方向にパルス状の力が生じている。それに対して実装法 C を用いたときには、物理的に正しくないこれらのパルス状の力が発生していない。

4.2 実験 2: 複雑な表面形状のインピーダンス型力覚提示

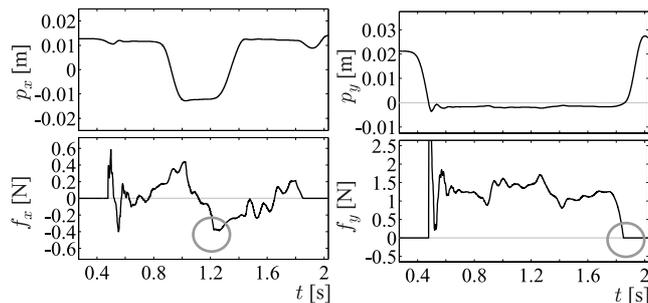
Fig. 10 の力覚提示装置を用いて、**Fig. 13** の仮想物体のインピーダンス型力覚提示を行った。この仮想物体は、半径 0.035 [m] の円柱に内接する正 10 角柱である。この仮想物体との接触を力覚提示するための幾何学的アルゴリズム \mathbf{g} を作成し、式 (29) の方法で実装した。仮想物体の表面の摩擦係数は $\mu = 0.3$ とし、



(a) Method A, eq.(1)



(b) Method B, eq.(5)



(c) Method C, eq.(29)

Fig. 12 Results of Experiment 1: impedance-type haptic rendering of a frictional flat surface

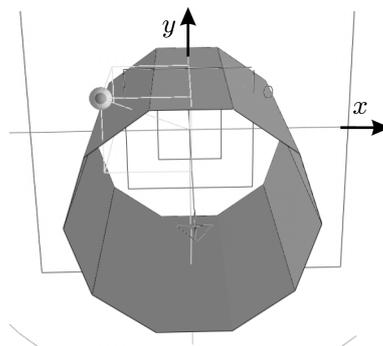


Fig. 13 Virtual object used for Experiment 2

その他のパラメータも実験 1 と同一とした。なお、アルゴリズム \mathbf{g} の中では、面要素間の境界での反力を平滑化するために、force shading [5] を用いた。このアルゴリズムの詳細は付録 B に示す。

この仮想物体の表面上でなぞり動作を行ったときのデータ

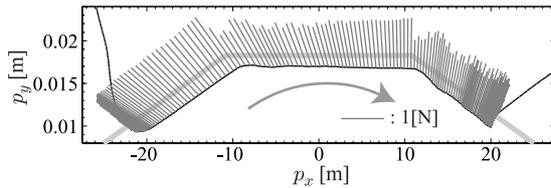


Fig. 14 Results of Experiment 2: impedance-type haptic rendering of a decagonal prism

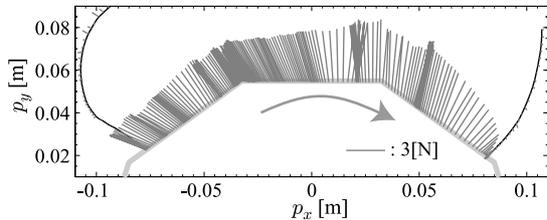


Fig. 15 Results of Experiment 3: admittance-type haptic rendering of a decagon

Fig. 14 に示す. ここで, 黒の曲線はツール位置の測定値 $p(k)$ の軌跡であり, 灰色の線分は 0.005 [s] ごとのアクチュエータの発生力 $f(k)$ のベクトルを表す. また, 灰色の太線は仮想物体の輪郭を表す. 従来, この種の物体形状の力覚提示は実装法 A あるいは実装法 B を用いて行われてきたが, 提案手法 (式 (29)) によっても, 適切な力覚提示が実現していることが読み取れる.

4.3 実験 3: 複雑な表面形状のアドミッタンス型力覚提示

Fig. 11 の装置を用いて, Fig. 13 と同形状の仮想物体のアドミッタンス型力覚提示を行った. 実験 2 と同じ関数 \mathcal{G} を, 式 (32) を用いて実装した. ただし装置の寸法が大きく異なるため, 仮想物体の寸法は実験 2 の 3 倍とした. また, 提示装置の動作が水平面内 (x - y 平面内) に限られていることから, プロキシ位置 $q(k)$ の z 座標は 0 に固定した. ツールの位置は, プロキシ位置 $q(k)$ に正確に追従するように高ゲインのフィードバック制御則により制御した[†]. ステップ時間は $T = 0.001$ [s], プロキシの質量は $M = 5$ [kg] とした.

Fig. 15 に実験結果を示す. ここで, 黒の曲線はツール位置の測定値の軌跡であり, 灰色の線分は力センサの 0.02 [s] ごとの測定値を反転させたベクトル $-h(k)$ (すなわち, ツールから実験者の手に加わる力) である. また, 灰色の太線は仮想物体の輪郭を表す. ここでも, 適切な力覚提示が実現できていることが読み取れる. すなわち, アドミッタンス型とインピーダンス型の力覚提示が共通した幾何学的アルゴリズム \mathcal{G} を用いて実現できるということが示された.

なお, Fig. 14 とは異なり, Fig. 15 においては, ツールが仮想物体の内部へほとんど侵入していない. これは, この実験での位置制御のゲイン (比例ゲインで $40,000$ [N/m]) が, 実験 2 における仮想連結のバネ定数 K (750 [N/m]) に比べて非常に大きいからである. よく知られているように, 実際に提示できる仮想環境の剛性は, 力覚提示装置の特性 (例えば位置センサ

の分解能など) に制限される. 式 (29) および式 (32) の提案によって, 提示装置の仕様にかかわらず共通した幾何学的アルゴリズムを扱えるようになった. しかし, 提示できる剛性の限界は装置の特性に依存するという点には注意が必要である.

5. おわりに

プロキシと仮想連結を用いた幾何学的な力覚提示アルゴリズムは従来から用いられてきたが, その応用範囲は限られていた. 本論文では, 幾何学的アルゴリズムの力学的な解釈を示した上で, 下記の二つの提案を行った.

- インピーダンス型力覚提示において幾何学的アルゴリズムと粘性ダンピングを両立する実装法, すなわち式 (29) を示した. ここでは, 式 (29a) の位置 \hat{p} を用いてプロキシ位置 q が決定され, \hat{p} と q との幾何学的関係から反力が決定される. このように決定された反力にはすでに粘性力が含まれている.
- アドミッタンス型力覚提示において幾何学的アルゴリズムを利用するための実装法, すなわち式 (32) を示した. ここでは, 式 (32a) の位置 \hat{p} を用いてプロキシ位置 q が決定される. 力覚提示装置はこのプロキシ位置 q に追従するように位置制御される.

2 種類の装置を用いて実験を行い, これらの手法の有効性を示した.

本論文での議論の対象は, 静的な仮想環境に限られていた. 動的な仮想環境との相互作用は, 移動する物体に固定された物体座標系で関数 \mathcal{G} の演算を行うことで, 少なくとも近似的には実現可能であると考えられる. 仮想物体の表面の変形も, 面要素の移動によって表現できると考えられる. ただし, より厳密な解析と証明は今後の課題であろう. また, 本論文での議論は, 仮想環境が関数 \mathcal{G} や関数 \mathcal{M} で表現できることと, 関数 \mathcal{G} が式 (9) を満たすことが前提となっていた, これらの前提についての厳密な証明も今後の課題である.

謝辞 Phantom Desktop と幾何データを扱うためのクラスライブラリを提供していただきました, 名古屋工業大学の佐野明人教授と宮崎健太氏に感謝いたします. また, 実験に用いたパラレルマニピュレータの設計・製作者である名古屋工業大学の武居直行助教授に感謝いたします.

参考文献

- [1] M. Ueberle, N. Mock and M. Buss: "ViSHARD10, a novel hyper-redundant haptic interface," Proc. of the 12th Symp. on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, pp.58–65, 2004.
- [2] R.Q. Van Der Linde and P. Lammertse: "HapticMaster - a generic force controlled robot for human interaction," Industrial Robot, vol.30, no.6, pp.515–524, 2003.
- [3] R. Taylor, P. Jensen, L.L. Whitcomb, A. Barnes, R. Kumar, D. Stoianovici, P. Gupta, Z. Wang, E. deJuan and L. Kavoussi: "A steady-hand robotic system for microsurgical augmentation," Int. J. of Robotics Research, vol.18, no.12, pp.1201–1210, 1999.
- [4] C.B. Zilles and J.K. Salisbury: "A constraint-based god-object method for haptic display," Proc. of the 1995 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp.146–151, 1995.
- [5] D.C. Ruspinini and O. Khatib: "Haptic display for human in-

[†] ツール位置の制御則としては, 安全のため, プロキシベースト・スライディングモード制御 [16] を用いた. 本実験の条件下において, この制御則は PID 制御とほぼ等価である.

teraction with virtual dynamic environments,” J. of Robotic Systems, vol.18, no.12, pp.769–783, 2001.

- [6] V. Hayward and B. Armstrong: ‘A new computational model of friction applied to haptic rendering,’ Experimental Robotics VI. pp.404–412, Springer-Verlag, 2000.
- [7] S. Hasegawa, N. Fujii, Y. Koike and M. Sato: “Real-time rigid body simulation based on volumetric penalty method,” Proc. of the 11th Symp. on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, pp.326–332, 2003.
- [8] L. Kim, A. Kyrikou, G. Sukhatme and M. Desbrun: “An implicit-based haptic rendering technique,” Proc. of the 2002 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp.2943–2948, 2002.
- [9] K. Lundin, A. Ynnerman and B. Gudmundsson: “Proxy-based haptic feedback from volumetric density data,” Proc. of EuroHaptics 2002, pp.104–109, 2002.
- [10] M. Ikits, J.D. Brederson, C.D. Hansen and C.R. Johnson: “A constraint-based technique for haptic volume exploration,” Proc. of the 14th IEEE Visualization 2003 Conf., pp.263–269, 2003.
- [11] A. Joukhadar, A. Deguet and C. Laugier: “A collision model for rigid and deformable bodies,” Proc. of the 1998 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1998.
- [12] K.H. Hunt and F.R.E. Crossle: “Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact,” Trans. of the ASME: J. of Applied Mechanics, vol.7, pp.440–445, 1975.
- [13] 菊植, 藤本: “インピーダンス型離散時間摩擦モデル”, 第 23 回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 3A13, 2005.
- [14] R. Kikuuwe, N. Takesue, A. Sano, H. Mochiyama and H. Fujimoto: “Fixed-step friction simulation: From classical Coulomb model to modern continuous models,” Proc. of the 2005 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp.3910–3917, 2005.
- [15] 菊植, 武居, 佐野, 望山, 藤本: “有限時間で零速度に収束する不連続摩擦モデル”, 第 10 回ロボティクスシンポジウム予稿集, pp.215–220, 2005.
- [16] R. Kikuuwe and H. Fujimoto: “Proxy-based sliding mode control for accurate and safe position control,” Proc. of the 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.26–31, 2006.

付録 A. 式 (23) から式 (4) の導出

ここでは, 式 (23) で定義される関数 \mathcal{M} が式 (4) で定義される関数 \mathcal{G} に対応することを示す. すなわち, 式 (23) の関数 \mathcal{M} と式 (4) の関数 \mathcal{G} が式 (11) を満たすことを示す.

いま, ある $\kappa > 0$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, および $\mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^n$ について下式が成立すると仮定する.

$$\kappa(\mathbf{q}_n - \mathbf{p}) = \mathcal{M}(\mathbf{q}_n, (\mathbf{q}_n - \mathbf{q})/T) \quad (\text{A.1})$$

関数 \mathcal{M} が式 (23) で定義されるとき, 式 (A.1) は下記のようになる.

$$\kappa(\mathbf{q}_n - \mathbf{p}) = (\mathbf{n} - \mu \mathbf{N} \text{sgn}(\mathbf{N}^T(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}))) \text{dio}(\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n) \quad (\text{A.2})$$

まず, $\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n > 0$ のときは $\text{dio}(\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n) = 0$ であるので, 式 (A.2) は $\kappa(\mathbf{q}_n - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$, すなわち, $\mathbf{q}_n = \mathbf{p}$ となる. これより, $\mathbf{n}^T \mathbf{p} > 0$ の条件下において, 式 (A.2) は式 (4) の定義の $\mathbf{q}_n = \mathcal{G}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ と等価である.

一方, $\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n = 0$ のとき $c = \text{dio}(\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n)$ とすると, c は $c \geq 0$ の任意の値をとる. このとき, $\mathbf{n}^T \mathbf{q}_n = 0$ が満たされるので,

\mathbf{q}_n は $(n-1)$ 次元ベクトル \mathbf{e} を用いて

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{N} \mathbf{e} \quad (\text{A.3})$$

と表せる. これを式 (A.2) に代入すると,

$$\kappa(\mathbf{N} \mathbf{e} - \mathbf{p}) = c(\mathbf{n} - \mu \mathbf{N} \text{sgn}(\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{q})) \quad (\text{A.4})$$

となる. 式 (A.4) の両辺に左から \mathbf{N}^T をかけると,

$$\kappa(\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{p}) = -c \mu \text{sgn}(\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{q}) \quad (\text{A.5})$$

となり, また, 式 (A.4) の両辺に左から \mathbf{n}^T をかけると,

$$\kappa(-\mathbf{n}^T \mathbf{p}) = c \quad (\text{A.6})$$

となる. 式 (A.5) と式 (A.6) から c を消去すると,

$$\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{p} = -\mu(-\mathbf{n}^T \mathbf{p}) \text{sgn}(\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{q}) \quad (\text{A.7})$$

となる, また, 式 (A.6) は $c \geq 0$ より $-\mathbf{n}^T \mathbf{p} \geq 0$ となる. $-\mathbf{n}^T \mathbf{p} > 0$ が成立するときに式 (A.7) を書き直すと,

$$\frac{\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{p}}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}} = \text{sgn} \left(\frac{\mathbf{N}^T(\mathbf{q} - \mathbf{p})}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}} - \frac{\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{p}}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}} \right) \quad (\text{A.8})$$

となる. 定理 2 より, 上式は下式と等価である.

$$\frac{\mathbf{e} - \mathbf{N}^T \mathbf{p}}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}} \Big/ \max \left(\frac{\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}}, 1 \right) \quad (\text{A.9})$$

これはさらに下式と等価である.

$$\mathbf{e} = \frac{(-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}) \mathbf{N}^T(\mathbf{q} - \mathbf{p})}{\max(\|\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})\|, -\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p})} + \mathbf{N}^T \mathbf{p} \quad (\text{A.10})$$

$-\mathbf{n}^T \mathbf{p} = 0$ の場合でも式 (A.7) は上式と等価になるので, $\mathbf{n}^T \mathbf{p} \leq 0$ のとき式 (A.10) は常に成立する. 式 (A.3) より, \mathbf{q}_n は下式で与えられる.

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{p} + \frac{(-\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}) \mathbf{N} \mathbf{N}^T(\mathbf{q} - \mathbf{p})}{\max(\|\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})\|, -\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p})} \quad (\text{A.11})$$

\mathbf{N} の性質より $\|\mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})\| = \|\mathbf{N} \mathbf{N}^T(\mathbf{p} - \mathbf{q})\|$ であるので, $\mathbf{n}^T \mathbf{p} \leq 0$ の条件下において, 式 (A.11) は式 (4) の定義の $\mathbf{q}_n = \mathcal{G}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ と等価である.

以上により, 式 (A.2) はすべての \mathbf{p} について, 式 (4) の定義の $\mathbf{q}_n = \mathcal{G}(\kappa, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ と等価であることが示された.

付録 B. 実験 2 および実験 3 で用いた関数 \mathcal{G}

ここでは, 実験 2 および実験 3 で用いた関数 \mathcal{G} のアルゴリズムの詳細を示す.

まず, 仮想物体 (正 10 角柱) は下記の頂点を用いて定義した.

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{c} + [R \sin(2\pi i/10), R \cos(2\pi i/10), Z]^T \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{c} + [R \sin(2\pi i/10), R \cos(2\pi i/10), -Z]^T \in \mathbb{R}^3$$

実験 2 においては, $\mathbf{c} = [0 [\text{m}], -0.015 [\text{m}], 0 [\text{m}]]^T$, $R = 0.035 [\text{m}]$ とした. 実験 3 においては $\mathbf{c} = [0 [\text{m}], -0.045 [\text{m}], z [\text{m}]]^T$, $R = 0.105 [\text{m}]$ とした. 頂点 \mathbf{a}_i と頂点 \mathbf{b}_i とを結ぶ線を i 番目の稜線とし, \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i , \mathbf{b}_{i+1} , および \mathbf{a}_{i+1} で囲まれる面を i 番目の側面とした. また, i 番目の稜線における法線ベクトルを,

$$\mathbf{n}_i = \text{sgn}(\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i - 2\mathbf{c})$$

と定義した. ここで sgn は式 (20) で定義した関数である.

関数 \mathcal{G} のアルゴリズムは下記のように構成した.

FUNCTION $\mathcal{G}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q})$

IF \mathbf{p} is outside the object RETURN \mathbf{p}

$\mathbf{q}_{\text{sf}} := \text{projection}(\mathbf{q})$

$i_{\text{sf}} := \text{nearest_face_index}(\mathbf{q}_{\text{sf}})$

$a_1 := \|(\mathbf{q}_{\text{sf}} - \mathbf{a}_{i_{\text{sf}}}) \times (\mathbf{q}_{\text{sf}} - \mathbf{b}_{i_{\text{sf}}})\|$

$a_2 := \|(\mathbf{q}_{\text{sf}} - \mathbf{a}_{i_{\text{sf}}+1}) \times (\mathbf{q}_{\text{sf}} - \mathbf{b}_{i_{\text{sf}}+1})\|$

$\mathbf{n}_R := \text{sgn}(a_2 \mathbf{n}_{i_{\text{sf}}} + a_1 \mathbf{n}_{i_{\text{sf}}+1})$

$\mathbf{q}_{\text{sf}2} := \mathcal{S}(\mathbf{n}_R, \mathbf{p} - \mathbf{q}_{\text{sf}}, \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\text{sf}}) + \mathbf{q}_{\text{sf}}$

IF $\mathbf{q}_{\text{sf}2}$ is outside the object RETURN $\mathbf{q}_{\text{sf}2}$

RETURN $\text{projection}(\mathbf{q}_{\text{sf}2})$

END FUNCTION

ここで関数 \mathcal{S} は下式で定義される関数である.

FUNCTION $\mathcal{S}(\mathbf{n}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$

IF $\mathbf{n}^T \mathbf{p} > 0$ RETURN \mathbf{p}

$\mathbf{p}_{\text{sf}} := \mathbf{p} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{p}$

$\mathbf{q}_{\text{sf}} := \mathbf{q} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{q}$

IF $\|\mathbf{p}_{\text{sf}} - \mathbf{q}_{\text{sf}}\|$

$\leq -\mu \mathbf{n}^T \mathbf{p}$ RETURN \mathbf{q}_{sf}

RETURN $\mathbf{p}_{\text{sf}} + \mu \mathbf{n}^T \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}_{\text{sf}} - \mathbf{q}_{\text{sf}}}{\|\mathbf{p}_{\text{sf}} - \mathbf{q}_{\text{sf}}\|}$

END FUNCTION

これは式 (4) で定義される関数 \mathcal{G} と同一のものであり, 原点を含み, \mathbf{n} を外向き法線ベクトルとし, かつ, 摩擦係数が $\mu > 0$ である平面による片側拘束を表す. また, 関数 $\text{nearest_face_index}(\mathbf{p})$ は, 点 \mathbf{p} から最も近い側面の番号を返り値とする関数である. さらに, 関数 $\text{projection}(\mathbf{p})$ は

FUNCTION $\text{projection}(\mathbf{p})$

$i_{\text{sf}} := \text{nearest_face_index}(\mathbf{p})$

$\mathbf{n} := \text{sgn}(\mathbf{n}_{i_{\text{sf}}} + \mathbf{n}_{i_{\text{sf}}+1})$

RETURN $\mathbf{p} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T (\mathbf{p} - \mathbf{a}_{i_{\text{sf}}})$

END FUNCTION

で定義される関数であり, 点 \mathbf{p} から最も近い物体表面上の点 (すなわち最も近い側面の上への点 \mathbf{p} の正射影) を返り値とする,

点 \mathbf{q}_{sf} は, i_{sf} 番目の側面の上に存在し, それと i_{sf} 番目の稜線との距離は a_1/Z , $(i_{\text{sf}} + 1)$ 番目の稜線との距離は a_2/Z である. ベクトル \mathbf{n}_R は, 位置 \mathbf{q}_{sf} における線形内挿された法線ベクトルである. Force shading [5] の手法に基づき, プロクシ位置の更新は, 点 \mathbf{q}_{sf} を通り \mathbf{n}_R を法線ベクトルとする仮の平面の上で行われる. その結果得られる更新後プロクシ位置 $\mathbf{q}_{\text{sf}2}$ が仮想物体の内部にある場合, それと最も近い表面の上の点をこの関数 \mathcal{G} の返り値とする.



菊植 亮 (Ryo Kikuuwe)

1975 年 7 月 17 日生. 2003 年京都大学大学院工学研究科博士後期課程研究指導認定退学. 現在, 名古屋工業大学寄附講座助手. 博士 (工学). 触覚センシング, 作業支援ロボティクスなどの研究に従事. 2005 年日本ロボット学会研究奨励賞受賞. 計測自動制御学会, 日本機械学会, IEEE の会員.

(日本ロボット学会正会員)



藤本英雄 (Hideo Fujimoto)

1947 年 7 月 7 日生. 1970 年名古屋大学工学部機械学科卒業. 現在, 名古屋工業大学教授. ものづくりテクノセンター長. 医学工学や感性の工学, ロボティクスなどに興味を持つ. ASME 最優秀論文賞, 2004 年度グッドデザイン賞など多数受賞. スケジュール学会会長, SICE 常務理事部門協議会議長, SICE 中部支部支部長, 文科省科学技術・学術審議会文化資源委員会委員など歴任. 現在, 愛知県ものづくり人材育成協議会座長, 日本機械学会フェロー・評議員. 工学博士. (日本ロボット学会正会員)