プロクシベースト・スライディングモード制御の再解釈と一般化

○菊植 亮（九州大学）

Reinterpretation and Generalization of Proxy-Based Sliding Mode Control

*Ryo Kikuuwe (Kyushu University)

Abstract— Proxy-Based Sliding Mode Control (PSMC), which we previously proposed, is a position control scheme that is as accurate as and safer than PID position control. This paper presents a class of control laws that includes PSMC. A control law of the class stores a state vector in the computer and has an update rule for the state vector. The actuator force is produced to make the real state vector to follow the virtual one as long as the actuator force is not saturated. The control law implicitly includes PID control and thus it suppresses the influence of disturbances and nonlinearities.

Key Words: Position control, state space

1. はじめに

一般にロボットは関節摩擦などのモデル化しにくい機械要素を多く含む．このため，力制御やインピーダンス制御を行う際にも，高ゲインの PID 制御方式の位置制御器を最下層の帰還ループとして用いることが多い．しかし高ゲインの PID 位置制御は安全性に問題があり，実測位置と目標位置との間の偏差が大きくなった場合，過大な速度やオーバーシュートを発生することがある．このような状況は，環境との接触や，アクチュエータの一時的なパワー低下，あるいは，上位の制御器からの誤った目標位置指令などによって発生する．

近年著者らは,『プロクシベースト･スライディングモード制御 (Proxy-based sliding mode control: PSMC)』という新しい制御則を提案した [1]．この制御即は PID 制御の単純な拡張でもあり，スライディングモード制御の離散時間近似でもある．この手法は，アクチュエータの力が飽和しない限り PID 制御と等価であり，ロボットの慣性や関節摩擦の影響を抑制することができる．一方で，アクチュエータの力が飽和して大きな位置誤差が生じた後には，目標位置へ緩やかに指数収束してオーバーシュートを生じにくい．

著者らは当初，計算機内部に仮想的な力学システムを想定し，そこから PSMC の制御則の導出を行った．しかしながら，出来上がったアルゴリズムの物理的解釈が著者らの意図した力学システムのみであるという保障はない．本稿ではまず，PSMC の制御則の異なる解釈を示し，さらに，PSMC が属するより広い新たな制御則のクラスを示す．さらに，そのクラスに属する制御則の一例を示す．

2. PSMC のアルゴリズムとその解釈

具体的には，PSMC とは下記の制御則である．

$$\boldsymbol{\sigma}(k) := \boldsymbol{p}_d(k) - \boldsymbol{p}(k) + \frac{H}{T}(\nabla \boldsymbol{p}_d(k) - \nabla \boldsymbol{p}(k)) \tag{1a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^*(k) := & \tfrac{B+KT+LT^2}{H+T}\boldsymbol{\sigma}(k) \\ & + \tfrac{KH-B+LT(2H+T)}{(H+T)T}\boldsymbol{a}(k-1) \\ & - \tfrac{KH-B+LTH}{(H+T)T}\boldsymbol{a}(k-2)\end{aligned} \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{f}(k) := F\mathbf{sat}(\boldsymbol{f}^*(k)/F) \tag{1c}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(k) := & \tfrac{(2B+KT)}{B+KT+LT^2}\boldsymbol{a}(k-1) \\ & - \tfrac{B}{B+KT+LT^2}\boldsymbol{a}(k-2) \\ & + \tfrac{T^2}{B+KT+LT^2}\boldsymbol{f}(k).\end{aligned} \tag{1d}$$

ここで，$\boldsymbol{p}$ は制御対象の位置，$\boldsymbol{p}_d$ は目標位置，$\boldsymbol{f}$ はアクチュエータが発生する力であり，$\boldsymbol{a}$ は制御器内部に記憶された状態変数，$\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{f}^*$ は計算仮定で用いる中間的な値である．各記号の後の k などは，離散時間のインデックスである．また，K は比例ゲイン，B は微分ゲイン，L は積分ゲイン，H は時定数，T は制御周期（ステップ時間）を表す．また，関数 **sat** は単位飽和関数であり，

$$\mathbf{sat}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \text{if } \|\boldsymbol{x}\| < 1 \\ \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\| & \text{if } \|\boldsymbol{x}\| \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

と定義される．また，∇ は後退差分演算子を表し，$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$ と定義される．

式 (1) の物理的解釈は一意ではないが，すくなくとも，式 (1) は下記の連立方程式と代数的に等価である．

$$\boldsymbol{f}(k) = L\boldsymbol{a}(k) + K\nabla\boldsymbol{a}(k)/T + B\nabla^2\boldsymbol{a}(k)/T^2 \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{f}(k) = F\mathbf{sgn}\,(\boldsymbol{s}(k)) \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{s}(k) = \boldsymbol{p}_d(k) - \boldsymbol{q}(k) + H(\nabla\boldsymbol{p}_d(k) - \nabla\boldsymbol{q}(k))/T \tag{3c}$$

$$\boldsymbol{q}(k) = \boldsymbol{p}(k) + \nabla\boldsymbol{a}(k)/T \tag{3d}$$

ここで，関数 **sgn** は符号関数の多次元版であり，

$$\mathbf{sgn}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\| & \text{if } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \\ \{\boldsymbol{e} \,|\, \|\boldsymbol{e}\| \leq 1\} & \text{if } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \end{cases} \tag{4}$$

で与えられる．連立方程式 (3) の物理的解釈は例えば Fig. 1 のように表すことができる．位置の次元を持つ変数 $\boldsymbol{q}(k)$ は，計算機内に想定された仮想物体（プロクシ）の位置であると解釈できる．このプロクシには PID 制御による力（式 (3a) で決定される $\boldsymbol{f}(k)$）とス

ライディングモード制御による力（式 (3b) で決定される $\boldsymbol{f}(k)$）が働く．これらの力は同じ $\boldsymbol{f}(k)$ であり，常に平衡状態にあるが，これはプロクシが質量を持っていないと解釈すれば物理的に矛盾が生じない．$\boldsymbol{s}(k)=\boldsymbol{o}$ が満たされるとき，プロクシはスライディングモードにあるといい，このとき，プロクシの位置 $\boldsymbol{q}(k)$ は目標位置 $\boldsymbol{p}_d(k)$ に時定数 H で指数収束する軌道を描く．

既報 [1] において筆者らは，上記の解釈を出発点として，式 (1) の制御アルゴリズムを導いた．しかしながら導かれた制御アルゴリズム自体に一意な物理的意味を求めることには無理があり,「内部的にスライディングモード制御を含んでいる」という解釈も唯一の解釈ではない．

3.　再解釈と一般形式

式 (1) をより一般的な形式で表すと，下記のようになる．

$$\boldsymbol{p}^*(k)=\boldsymbol{p}(k)+\frac{B\nabla\boldsymbol{a}(k-1)}{T^2K^*}-\frac{L\boldsymbol{a}(k-1)}{K^*} \tag{5a}$$
$$\boldsymbol{q}^*(k)=\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{p}_d(k),\cdots,\boldsymbol{q}(k-1),\cdots) \tag{5b}$$
$$\boldsymbol{f}^*(k)=K^*(\boldsymbol{q}^*(k)-\boldsymbol{p}^*(k)) \tag{5c}$$
$$\boldsymbol{f}(k)=\operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}^*(k)\| \tag{5d}$$
$$\boldsymbol{q}(k)=\boldsymbol{p}^*(k)+\boldsymbol{f}(k)/K^* \tag{5e}$$
$$\boldsymbol{a}(k)=\boldsymbol{a}(k-1)+T(\boldsymbol{q}(k)-\boldsymbol{p}(k)) \tag{5f}$$

ただしここで，$K^*=K+B/T+LT$ である．ここで関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ および集合 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ を

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{p}_{d0},\boldsymbol{p}_{d1},\boldsymbol{q}_1)=\boldsymbol{p}_{d1}+\frac{H}{H+T}(\boldsymbol{p}_{d0}-\boldsymbol{q}_1) \tag{6}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}=\{\boldsymbol{f}\mid\|\boldsymbol{f}\|\le F\} \tag{7}$$

と定義すると，式 (5) は式 (1) と等価になる．

式 (5) の表現は式 (1) の表現よりも理解しやすい．まず $\boldsymbol{p}^*(k)$ は，制御器に与えられる入力情報とみなすことができる．制御対象に加えられる外力は，$\boldsymbol{p}(k)$ を経由して $\boldsymbol{p}^*(k)$ に反映される．また，$\boldsymbol{q}^*(k)$ は，プロクシがスライディングモードに従っているときに，時刻 kT において実現されるべきプロクシの位置である．力 $\boldsymbol{f}^*(k)$ は系がスライディングモードにあるとしたときに，アクチュエータから発生される力である．それに対して集合 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ は許容できるアクチュエータ発生力の集合であり，$\boldsymbol{f}^*(k)$ が $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ に含まれない場合には，$\boldsymbol{f}^*(k)$ に最も近い $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ の元が $\boldsymbol{f}(k)$ として採用される．そして，$\boldsymbol{f}(k)$ と矛盾が生じないように，実際のプロクシの位置 $\boldsymbol{q}(k)$ が決定される．この表現は，位置 $\boldsymbol{p}(k)$ とプロクシ位置 $\boldsymbol{q}(k)$ を結ぶ PID 制御器を，入力位置 $\boldsymbol{p}^*(k)$ と $\boldsymbol{q}(k)$ とを結ぶ剛性 K^* の単純バネに置き換えていることになる．著者らは同様の方法を力覚提示の分野でも提案しているが [2]，式 (5) の手法はそれの拡張であるともいえる．

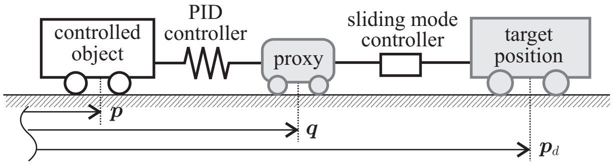

Fig.1 Physical interpretation of PSMC.

4.　関数 $\mathcal{U}$ の一例

前節で導いた式 (5) において関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ および集合 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ を適切に再定義することによって，さまざまな制御則を導くことができる．既報で提案した PSMC（式 (6) の $\boldsymbol{\mathcal{U}}$）では，プロクシがスライディングモードに到達するまで最大トルクで急加速するという問題があった．ここでは関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ を適切に再定義することで，目標位置のステップ入力に対して緩やかな加速を示す 1 自由度の位置制御則を実現する．

目標位置を p_d とする．プロクシの位置と速度をそれぞれを q および u（$\in\mathbb{R}$）とし，これらの状態量で張られる状態空間を考える．それを Fig. 2 に示すように，下記で定義される 4 つの領域に分割する．

$$\mathcal{A}=\{\{q,u\}\mid u\ge V\ \wedge\ q-p_d+Hu>0\} \tag{8}$$
$$\mathcal{B}=\{\{q,u\}\mid u>-V\ \wedge\ q-p_d+Hu<0\} \tag{9}$$
$$\mathcal{C}=\{\{q,u\}\mid u\le -V\ \wedge\ q-p_d+Hu<0\} \tag{10}$$
$$\mathcal{D}=\{\{q,u\}\mid u<V\ \wedge\ q-p_d+Hu>0\} \tag{11}$$

ここで，$V>0$，$H>0$ である．また，領域の境界を構成する下記の平面を定義する．

$$\mathcal{S}=\{\{q,u\}\mid q-p_d+Hu=0\} \tag{12}$$

領域 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{C}$ においてプロクシは減速させられ，領域 $\mathcal{B}$ および $\mathcal{D}$ においてプロクシは加速させられるものとする．各領域において，プロクシの状態 $\{q,u\}$ の更新は，下記の手順で行われるものとする．

$$u^*(k)=U_{\mathcal{X}}(p_d(k),q(k-1),u(k-1)) \tag{13a}$$
$$q^*(k)=q(k-1)+Tu^*(k) \tag{13b}$$

ただしここで，

$$U_{\mathcal{A}}(p_d,q,u)=H_du/(H_d+T) \tag{14}$$
$$U_{\mathcal{B}}(p_d,q,u)=H_a\max(V,u)/(H_a-T) \tag{15}$$
$$U_{\mathcal{C}}(p_d,q,u)=H_du/(H_d+T) \tag{16}$$
$$U_{\mathcal{D}}(p_d,q,u)=H_a\min(-V,u)/(H_a-T) \tag{17}$$
$$U_{\mathcal{S}}(p_d,q,u)=(p_d-q)/(H+T) \tag{18}$$

ここで $H_a>0$，$H>H_d>0$ である．領域 $\mathcal{A}$ においてはプロクシの速さは時定数 H_d で指数関数的に小さく

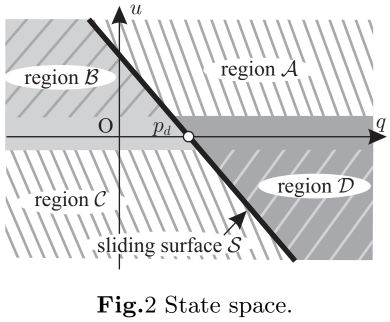

Fig.2 State space.

なり，領域 $\mathcal{B}$ においてはプロクシの速さは時定数 H_a で指数関数的に大きくなる．また，平面 $\mathcal{S}$ においては，プロクシは目標位置 p_d へ時定数 H_d で指数収束する．$H > H_d > 0$ より，領域 $\mathcal{A}$ および $\mathcal{C}$ にあるプロクシは，平面 $\mathcal{S}$ へ引き付けられることになる．

式 (13) による更新後にプロクシの状態が別の領域に入ってしまった場合の処理に注意すると，結局式 (5b) を下式で置き換えるとよいことになる．

$$\boldsymbol{q}^*(k) = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\boldsymbol{p}_d(k), \boldsymbol{q}(k-1), \boldsymbol{q}(k-2)) \qquad (19)$$

ただしここで，関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ の定義は以下である．

FUNCTION $\boldsymbol{\mathcal{U}}(p_d, q, q_2)$
$u = (q - q_2)/T$
IF $\mathcal{A} \ni \{q, u\}$
　$u^* = U_{\mathcal{A}}(p_d, q, u);$
　IF $\mathcal{D} \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* := -V$
　IF $\mathcal{B} \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* := U_{\mathcal{S}}(p_d, q, u)$
ELIF $\mathcal{B} \ni \{q, u\}$
　$u^* = U_{\mathcal{B}}(p_d, q, u)$
　IF $(\mathcal{A} \cup \mathcal{D}) \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* = U_{\mathcal{S}}(p_d, q, u)$
ELIF $\mathcal{C} \ni \{q, u\}$
　$u^* = U_{\mathcal{C}}(p_d, q, u)$
　IF $\mathcal{B} \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* = V$
　IF $\mathcal{D} \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* = U_{\mathcal{S}}(p_d, q, u)$
ELSE // $\mathcal{D} \ni \{q, u\}$
　$u^* = U_{\mathcal{D}}(p_d, q, u)$
　IF $(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \ni \{q + Tu^*, u^*\}$ THEN $u^* := U_{\mathcal{S}}(p_d, q, u)$
END IF
RETURN $q + Tu^*$ (20)

5. シミュレーション

式 (20) の関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ の妥当性を調べるためのシミュレーションを行った．参考のため，従来型の PSMC（式 (6) の関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$）についても同じシミュレーションを行った．制御対象は Fig. 3 に示すような 1 自由度の 2 慣性系とした．これは一般的な産業用ロボットに用いられている，ある程度の弾性を持つ減速器を想定している．モーターの駆動軸側に装着されたエンコーダによって角度 p が計測されるものとする．ただしエンコーダの分解能は一周 400000 ステップとした．駆動軸側の質量に加わるクーロン摩擦力は陰的オイラー法に基づく Rigid Admittance-Type 摩擦モデル [3] を用いて実装した．シミュレーションのステップ時間は 10^{-7} s とし，制御器のステップ時間は $T = 10^{-3}$ s とした．制御対象のパラメータを Table 1 に，制御器のパラメータを Table 2 に示す．

まず，時刻 $t = 0.5$ s において目標位置が $p_d = 0$ rad から $p_d = 1.5$ rad へステップ状に変化する場合のシミュレーションを行った．結果を Fig. 4 に示す．時刻 $t = 0.5$ s において，既報の PSMC では最大トルクで急加速しているが，式 (20) の関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ を用いると，加速が式 (15) で意図したとおりに指数関数上になっていることが読み取れる．

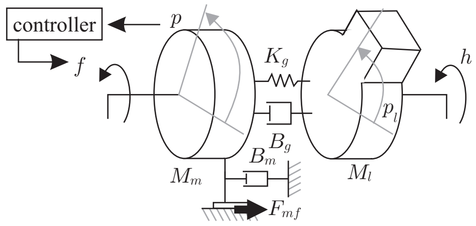

Fig.3 1-DoF device model used in the simulation.

Table 1 Parameters for the 1-DOF device model.

symbol	value	unit
M_m	0.67	kg·m^2
B_m	10	N·m·s/rad
F_{mf}	10	N·m
K_g	10000	N·m/rad
B_g	100	N·m·s/rad
M_l	0.72	kg·m^2

Table 2 Parameters for the controller

symbol	value	unit
T	0.001	s
K	60000	Nm/rad
B	100	Nms/rad
L	1000	Nm/(s· rad)
F	100	Nm
H	0.1	s
H_a	0.1	s
H_d	0.05	s
V	0.05	rad/s

次に，目標位置への到達前に目標位置が変化する場合のシミュレーションを行った．この場合の結果を Fig. 5 に示す．式 (20) の関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ を用いると，指数関数上の目標位置が急激に変化した際にも，指数関数上の加減速が実現している．

最後に，障害物と接触した後の復帰動作のシミュレーションを行った．位置 1 rad において障害物と衝突し，$t = 1.5$ sec にその障害物が除去されるものとした．結果を Fig. 6 に示す．式 (20) の関数 $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ を用いた場合，障害物との接触（$t = 1$ s）によって指数関数上の加速が一時中断しているが，障害物がなくなると，再び零速度から指数関数上に加速が始まっているのが読み取れる．これは，この制御則が時刻の関数として目標軌道を与えたものではなく，時刻に依存しないフィードバック系として構成されていることによるものである．

6. おわりに

本稿では PSMC の一般化表現を示した．それは，計算機内に仮想的な状態量を想定して，その状態量を更新するルールをあらかじめ与え，更新された状態量に実際の制御対象の状態が追従するようにアクチュエータの力を決定するものである．この制御則は位置の PID 制御を暗黙に含んでおり，さらに，アクチュエータのトルク飽和への対応を整合性のある形で含んでいる．暗黙に含まれた PID 制御により，制御対象の慣性・摩擦や外乱の影響をトルク飽和しない範囲内で抑制し，設計したとおりの応答特性を実現することができる．ト

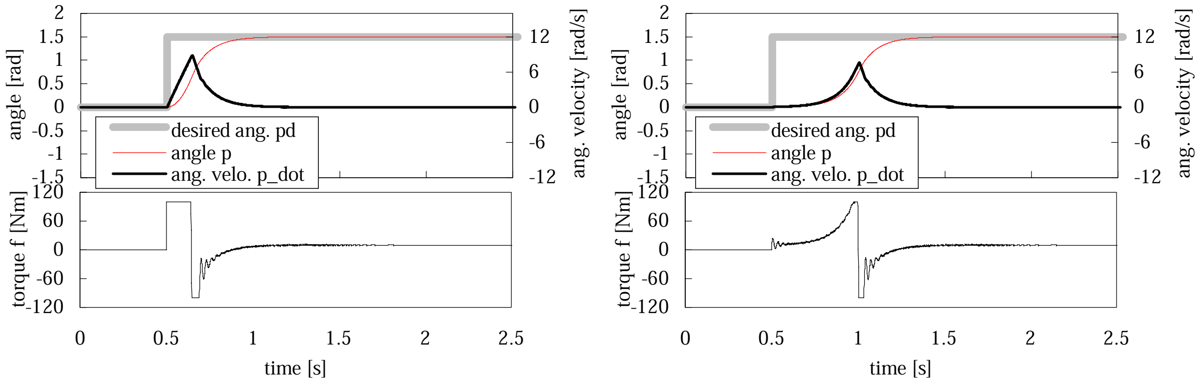

Fig.4 Results: Step Response (left:eq.(6), right:eq.(20)).

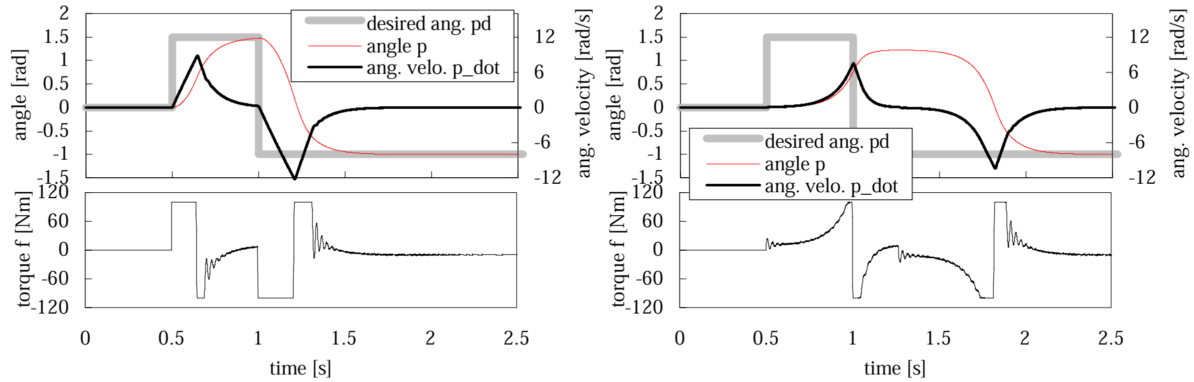

Fig.5 Results: abrupt change in target (left:eq.(6), right:eq.(20)).

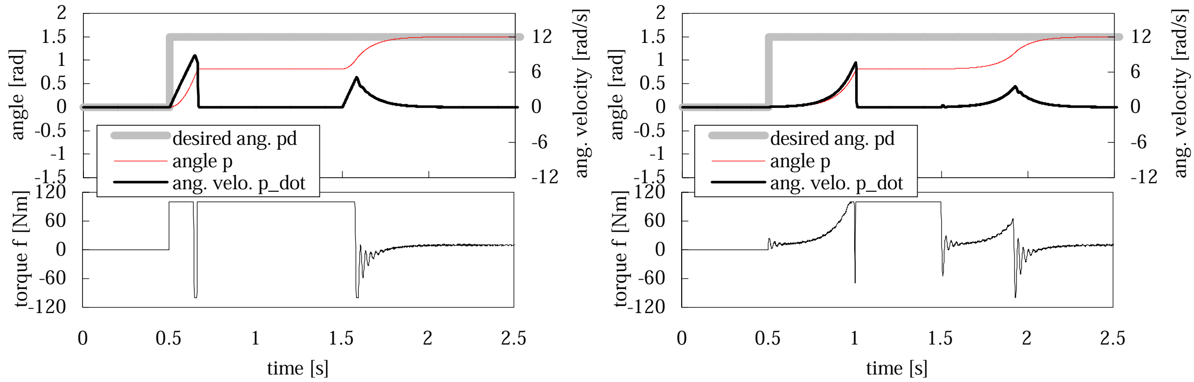

Fig.6 Results: collision ($t < 1.5$ s) (left:eq.(6), right:eq.(20)).

ルク飽和を考慮に入れた制御則は過去にも研究されているが（例えば [4]），本手法の特徴は，制御対象の動特性のモデルやパラメータを用いていない点にある．また，トルク飽和後の応答特性を意図したとおりに設計する手法を示したものであり，誤差や到達時間の最適化を目的としたものではない．

本稿ではさらに，PSMC の一般表現から導かれる新たな制御則の例を示し，これによって，PSMC の欠点である急加速を除去できる可能性を示した．第 4 節および第 5 節で示した関数 $\mathcal{U}$ の構造はあくまでも一例にすぎず，改良の余地がある．ただし，関数 $\mathcal{U}$ の改良は状態空間内での更新ロジックの工夫により実現することができ，デバイスの動特性を考慮する必要がない．これはこのクラスの制御則の利点であるといえる．

[1] R. Kikuuwe and H. Fujimoto. Proxy-based sliding mode control for accurate and safe position control. In *Proc. of 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 26–31, 2006.

[2] 菊植, 藤本. 幾何学的力覚提示アルゴリズムの力学的解釈とインピーダンス型およびアドミッタンス型の実装法. 日本ロボット学会誌, 25(2):142–151, 2006.

[3] R. Kikuuwe, N. Takesue, A. Sano, H. Mochiyama, and H. Fujimoto. Admittance and impedance representations of friction based on implicit Euler integration. *IEEE Trans. on Robotics*, 22(6):1176–1188, 2006.

[4] H. Arai, K. Tanie, and S. Tachi. Path tracking control of a manipulator considering torque saturation. *IEEE s. on Industrial Electronics*, 41(1):25–31, 1994.