日本バーチャルリアリティ学会研究報告，Vol.14，No.HDC03，pp.29-32
（日本バーチャルリアリティ学会「力触覚の提示と計算研究会」第3回研究会において発表）

力触覚の提示と計算研究委員会　第 3 回研究会 (2009 年 10 月)

大変形が可能な有限要素モデルとバネ質量モデルについて

On Finite Element Models and Mass-Spring Models For Simulating Large Deformation

菊植 亮 [1)]
Ryo KIKUUWE

1) 九州大学大学院 工学研究院
（〒 819-0395 福岡市西区元岡 744, kikuuwe@mech.kyushu-u.ac.jp）

Abstract : Many methods have been proposed for simulating deformation of soft objects. Linear finite element (FE) methods are simple but they produce unnatural deformation under large rotation. Mass-spring models (Spring Network [SN] models) are not consistent with continuum mechanics and nonlinear finite element methods are computationally costly. This article overviews previous techniques for simulating elastic deformation of objects based on FE models and SN models.

Key Words: *Finite Element Method, Exlicit, Implicit, Mass Spring Models*

1.　はじめに

柔軟体の実時間変形シミュレーションのためには様々な方法が考案されている．線形の有限要素モデル（FE モデル）は計算が比較的単純であるが，回転を含む大変形において不自然な変形を生じるということが知られている（例えば [17, Figs.2,3][14, Fig.7]）．一方で，バネ質量モデル（バネネットワークモデル，SN モデル）は連続体力学との整合性がとりにくく，また，非線形の FE モデルは計算が複雑である．さらに節点位置の更新方法として陽解法と陰解法のいずれを用いるかで，結果として得られる物体の挙動は大きく異なる．

本稿では，大変形が可能な非線形 FE モデルと SN モデルについての過去の研究を，陰解法と陽解法の両方の手法を対比しながら概説する．また，著者らが近年発表した，非線形 FE モデルの新しい計算法と，非線形 FE モデルと SN モデルの明示的な解析的関係 [9] についても解説する．

2.　変形シミュレーションの基本的枠組み

2.1　構成則：節点力の決定

時間とともに変化する物体の変形をシミュレートするためには，通常，連続体を多数の離散化した点（節点）で代表させて表現する．それらの節点の運動をシミュレートするためには連続体が節点に加える力（節点力）を考える必要があるが，このために，2 つの節点を接続する辺や，いくつかの節点で構成される多面体（最も簡単な例では四面体）を考えることが多い．SN モデルにおいては辺が伸縮バネとして扱われ，それは，その長さ方向にのみ力を発生する．FE モデルにおいては，多面体要素が中身の詰まった固体として扱われ，それが各節点に加える力が連続体力学によって決定される．

SN モデルと FE モデルは，いずれも節点位置の関数として節点力を決定するためのモデルである．すなわち，n 個の節点から構成される柔軟体モデルを考えたとき，節点位置ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{3n}$ から節点力ベクトル $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{3n}$ を求める関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ を規定するのが，SN モデルであり，FE モデルであるということである．

SN モデルと FE モデルのいずれにおいても，弾性体のシミュレーションの場合には節点力は保存力である必要がある．すなわち，下記の式を満たすスカラ関数 $\mathcal{W} : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ が存在する必要がある．

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{p}) = \partial\mathcal{W}(\boldsymbol{p})/\partial\boldsymbol{p}^T \tag{1}$$

逆に言えば，エネルギ関数 $\mathcal{W}$ を適切に設計することによって，節点力を決定できるということになる．

2.2　時間積分：節点位置の更新

ここで注意しなければならないのは，柔軟体変形シミュレーションの目的はそもそも力を求めることではなく，節点位置の経時的変化を求めることであるということである．このためには，節点力 $\boldsymbol{f}$ から節点位置 $\boldsymbol{p}$ をどのようにして更新するのかということを，別に決めておく必要がある．

一般に，柔軟体モデルの挙動は下記の微分方程式で表現することが多い．

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{h}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{3n\times3n}$ は慣性行列，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{3n}$ は節点速度ベ

クトル．$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ は粘性行列，$\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{3n}$ は外力ベクトルである．慣性項と粘性項が線形であることについて理論的な根拠はないが，実用上，線形で表されることが多い．特に，慣性行列 $\boldsymbol{M}$ は対角行列として表される．これは，各接点を独立した質点とみなすことと等価である．

実時間シミュレーションにおいては，あるステップ時間毎に位置 $\boldsymbol{p}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ を更新する必要がある．このための方法は，大きく分けて陽解法と陰解法という二つに分類できる．陽解法のうち最も単純なものは前進オイラー法であるが，それにおいては，式 (2) を下記の形で離散時間表現に近似する．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M}(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{k-1})/T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_{k-1} + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_{k-1}) = \boldsymbol{h}_k \\ &\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1} = T\boldsymbol{v}_k \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，T はステップ時間であり，k は離散時間のインデックスを表す整数である．上式に基づくと，下記のようなアルゴリズムが構築できる．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_{k-1} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_{k-1}) \\ &\quad \boldsymbol{v}_k \leftarrow \boldsymbol{v}_{k-1} + T\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_{k-1} - \boldsymbol{f}_{k-1}) \\ &\quad \boldsymbol{p}_k \leftarrow \boldsymbol{p}_{k-1} + T\boldsymbol{v}_k \end{aligned} \tag{4}$$

一方で，陰解法のうち最も単純な後退オイラー法では，式 (2) を下記の形で離散時間表現に近似する．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{k-1})/T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_k) = \boldsymbol{h}_k \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1} = T\boldsymbol{v}_k \tag{6}$$

これは，未知数 $\boldsymbol{p}_k$，$\boldsymbol{v}_k$ が関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ の中にも含まれている非線形連立方程式である．これを解くのは容易ではないが，$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_k)$ の部分をテーラー展開することによって，線形の方程式で近似できる．具体的には，

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_k) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_{k-1} + T\boldsymbol{v}_k) \approx \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_{k-1}) + T\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{p}_{k-1})\boldsymbol{v}_k \tag{7}$$

とする．ここで，$\boldsymbol{\mathcal{K}} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ であり，

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{p}) = \partial \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}) / \partial \boldsymbol{p} \tag{8}$$

である．これにより，式 (5)(6) は下記のアルゴリズムで計算できる．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f}_{k-1} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{p}_{k-1}) \\ &\boldsymbol{K}_{k-1} \leftarrow \boldsymbol{\mathcal{K}}(\boldsymbol{p}_{k-1}) \\ &\quad \boldsymbol{v}_k \leftarrow \frac{1}{T}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{T^2} + \frac{\boldsymbol{D}}{T} + \boldsymbol{K}_{k-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{f}_{k-1} + \frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_{k-1}}{T}\right) \\ &\quad \boldsymbol{p}_k \leftarrow \boldsymbol{p}_{k-1} + T\boldsymbol{v}_k \end{aligned} \tag{9}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{K}$ は接線剛性行列（あるいは全体接線剛性行列）とよばれる．3 行目の計算のためには共役勾配法が良く用いられるが [1]，この場合，逆行列の部分が正定対称行列である必要がある．

このように，陽解法では節点力 $\boldsymbol{f}$ を計算するだけでよく，剛性行列 $\boldsymbol{K}$ を計算する必要がない．しかし，数値的に不安定になりやすいという問題を含んでおり，それを防ぐためにはステップ時間幅 T を小さく，モデルを柔らかく，節点の質量を大きくする必要がある．一方で陰解法はより安定であるが，接線剛性行列 $\boldsymbol{K}$ をステップ時間ごとに算出する必要がある．線形の FE モデルでは $\boldsymbol{K}$ が一定であるためステップ時間毎にそれを更新する必要がないが，その代償として，大変形に対応できなくなっている．

3. 構成則について

3.1 非線形 FE モデルと SN モデル

前節で述べたとおり，柔軟体シミュレーションのためには，節点力を求める関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ を定義する必要がある．SN モデルや FE モデルのうち，どのようなモデルを構成則として選択するかという問題は，どのような関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ を用いるかという問題と等価である．一般に SN モデルは非線形 FE モデルに比べて単純であり，関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ として記述した際の計算量は SN モデルのほうが小さい．そのため，FE モデルを SN モデルによって近似するための試みもなされている．しかし，限定的な条件の下においてしか良い近似が得られていない [20, 10].

大変形に対応できる非線形 FE モデルのうち，最も簡単なものの一つは，Saint Venant-Kirchhoff（StVK）材料則に従う四面体一次要素から構成されるものである．StVK 材料則とは，Green Lagrange (GL) 歪テンソルと Second Piola-Kirchhoff (PK2) 応力テンソルが線形に関連づけられている材料則であり，材料的に線形で幾何学的に非線形な材料則であるともいえる．GL 歪テンソルを用いた FE モデルは一般に計算コストが大きいため，いくつかの近似的な方法が提案されている．Barbič と James [2] は，節点力が節点変位の 3 次多項式で表されるということを用いて，事前計算によって自由度を減らし，実時間計算における高速化を実現している．Zhong ら [21] は，GL 歪テンソルと非線形の材料則に基づいて表面変位と内部変位の関係を事前計算し，実時間計算では内挿を用いて計算を行っている．

非線形 FE モデルを用いながら，かつ，近似を用いることを避ける方法も，これまで用いられている．これらの研究のうちほとんどにおいて，計算は多面体要素毎に行われ，各要素の発生する力の貢献をそのまま加算することによって，各節点における節点力が計算されている．O'Brien と Hodgins[16] は，節点変位から PK2 応力テンソルを計算し，PK2 応力テンソルから節点力を計算している．この方法は切断などのさまざまな用途で用いられている [11, 6]．Miller ら [12] は六面体メッシュについて，同様の要素毎計算の方法を用いている．例外的であるのが，Picinbono ら [17] の方法である．彼らは，計算の手順やデータをメッシュの幾何プリミティブ（節点，辺，面，四面体要素）に関連づけることで，要素毎計算を避けている．彼らの方法においては，関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ が展開された 3 次多項式（線形項と非線形項の和）として表されるため，線形 FE モデルよりも計算時間が必要である．この方法は，線形 FE モデルより約 5 倍の計算

時間がかかると報告されている．

3.2　接線剛性行列

第 2.2 節で述べたように，安定したシミュレーションのためには陰解法が望ましいが，そのためには接線剛性行列 $\boldsymbol{K}$ をステップ時間ごとに算出する必要がある．線形の FE モデルではその必要がないため陰解法が使われることが多いが，多くの SN モデルと非線形 FE モデルを用いた研究（例えば [16, 11, 6, 12, 17, 22, 3] など）では，陽解法が好まれている．

従来の実時間シミュレーションの研究のうち，陰解法を用いた研究例もあるが，実行中の全体接線剛性行列の組み立ては好まれていない．これは主に，計算コストによるものである．Capell らの論文 [4] では，接線剛性行列を求める関数 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ が，展開された 2 次多項式の表現で与えられている．しかし，彼ら自身がそれを利用することに積極的ではない．Debunne ら [6] は “semi-implicit” な積分法を用いているが，これは，接線剛性行列の非対角成分をすべて無視している．Müller ら [13] の方法もすべての非対角成分を無視しているようである．

実時間シミュレーションにおいて接線剛性行列を用いるために，事前計算された要素毎の接線剛性行列（あるいは全体剛性行列の非零非対角ブロック）を回転させることで，近似的な接線剛性行列を求める方法も提案されている [14, 5, 4, 15]．このうち，Capell ら [4] の方法は，脊椎動物などの剛体の骨組みを持つモデルに適用可能である．それとは対照的に，「stiffness warping」[15] は汎用の方法であり，極分解（polar decomposition）で求められた回転行列によって独立して各要素の要素接線剛性行列が回転させられる．この方法は大きな変形（大きな歪み）の下でも安定であると報告されている．

3.3　要素の裏返りを防ぐ体積保存力

SN モデルと StVK 材料則に共通する欠点は，それが回転だけでなく鏡像反転についても不変であるということである．そのため，要素が反転した状態で物理的にありえない平衡状態になってしまう．インタラクティビティが重要でない用途のためには，StVK 材料則と GL 歪テンソルの利用を避ける方法もある（たとえば [18, 8]）．

最も単純な方法は，体積保存力を組み合わせることである．従来研究においても，この方法は SN モデル [20, 19, 10] と StVK-FE モデル [17] に組み合わせて用いられている．具体的な方法は [10, Appendix C.2][9, Section 4] などで解説されているため，ここではその概要のみを説明する．いま，四面体の頂点の座標を $\boldsymbol{p}_x$ と表し，辺のベクトルを $\tilde{\boldsymbol{p}}_X = \boldsymbol{p}_x - \boldsymbol{p}_y$（2 つの頂点ベクトルの差）と表すとする．このとき，四面体の体積を 6 倍した値は，右手系をなす 3 つの辺ベクトルのスカラー 3 乗積で表される．

$$C = \tilde{\boldsymbol{p}}_A \cdot (\tilde{\boldsymbol{p}}_B \times \tilde{\boldsymbol{p}}_C) \tag{10}$$

上式で表される量は，都合のよいことに，要素が裏返った際に符号がマイナスになる．すなわち，四面体の「符号付き体積」として上式の量を用いることができる．さらに都合の良いことには，上式は偏微分が非常に簡単である．簡単な式変形により，下記の関係が導ける．

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{p}_a} = \tilde{\boldsymbol{p}}_A \times \tilde{\boldsymbol{p}}_B, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{p}_a \partial \boldsymbol{p}_b} = [\tilde{\boldsymbol{p}}_C \times] \tag{11}$$

ここで，頂点 $\boldsymbol{p}_a$ は，辺 $\tilde{\boldsymbol{p}}_A$ と辺 $\tilde{\boldsymbol{p}}_B$ から作られる面に対向する頂点である．また，辺 $\tilde{\boldsymbol{p}}_C$ は，頂点 $\boldsymbol{p}_a$ と頂点 $\boldsymbol{p}_b$ から作られる辺に対向する辺である．（なお，各辺ベクトルの符号は適切に選択される必要がある．）これらを考慮に入れると，裏返りを防ぐための体積保存力は，符号付き体積 C の関数としてエネルギ関数 $\mathcal{W}$ を用いて定義することが望ましい．これによって，その 1 階偏微分 $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \partial\mathcal{W}/\partial\boldsymbol{p}^T$ や，2 階偏微分 $\boldsymbol{\mathcal{K}} = \partial^2\mathcal{W}/\partial\boldsymbol{p}^2$ の導出と実装を簡単に実現することができる．

4.　非線形 FE モデルの新しい定式化

StVK 材料則に従う四面体 FE モデル自体は従来から用いられているが，それを実現するための関数 $\mathcal{W}$，$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ および $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ の表現は，非常に複雑であった．著者らは最近，これらの関数の新しい簡潔な表現を発見した [9]．著者らによる関数 $\mathcal{W}$ の表現は下記のようなものである．

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\zeta_i\zeta_j \tag{12}$$

ただしここで，

$$\zeta_i = \|\tilde{\boldsymbol{p}}_i\|^2 - \|\tilde{\boldsymbol{p}}_i^{\mathrm{ini}}\|^2 \tag{13}$$

である．$L_{ij} \in \mathbb{R}$ はヤング率，ポアソン比，およびメッシュの幾何形状によって定まる定数であり，$\tilde{\boldsymbol{p}}_i \in \mathbb{R}^3$ は第 i 辺のベクトル，N はメッシュ中の辺の総数である．また，$\tilde{\boldsymbol{p}}_i^{\mathrm{ini}} \in \mathbb{R}^3$ は $\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ の初期値である．上式は下記のように，$i = j$ の項と $i \neq j$ の項の和に分解できる．

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N} L_i{\zeta_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j\} \\ i \neq j}} L_{ij}\zeta_i\zeta_j \tag{14}$$

上式の第 1 項は辺に蓄えられるエネルギの総和であり，第 2 項は辺の対に蓄えられるエネルギの総和である．第 1 項は，FE モデルの辺が非線形のバネとして働いていることを示す．また，第 2 項の L_{ij} が~~非負~~の値をとるのは，第 i 辺 非零
と第 j 辺が同一の四面体に属するときに限られているので，四面体を共有する辺の対（Tetrahedron-sharing edge pair; TSEP）のリストをあらかじめ作っておき，その対についてのみ L_{ij} を保存しておけばよい．上式は，非線形の FE モデルを非線形な SN モデルとそれ以外（TSEP）の和として表している．すなわち，非線形 FE モデルと非線形 SN モデルの関係を解析的に表していることになる．

なお，同様の表現が，Delingette[7] によっても独立に発見されている．著者らが TSEP と呼ぶ辺の対は，互いに交わる辺の対（頂点を共有して角を作る辺の対）と交わらない辺の対（4 面体を介して対向する辺の対）の 2 種類に分

類できるが，Delinggtte は前者を「angular stiffness」とよび，後者を「volumetric stiffness」とよんでいる．

Delingette の論文 [7] においては，上記の関数 $\mathcal{W}$ から導かれる関数 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ と関数 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ が明示的には示されていない．著者らの論文 [9] においてはこれらを明示的に導出した結果，従来の手法（たとえば [16] や [17]）と比較して，新しい表現を用いた場合，必要な浮動小数点演算の数が約 7 割少ないということが示されている．詳細は論文 [9] を参考されたい．

参考文献

[1] D. Baraff and A. Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proc. ACM SIGGRAPH 98*, pp. 43–54, 1998.

[2] J. Barbič and D. L. James. Real-time subspace integration for St. Venant-Kirchhoff deformable models. *ACM Trans. Graphics*, 24(3):982–990, 2005.

[3] I. Brouwer, V. Mora, and D. Laroche. A viscoelastic soft tissue model for haptic surgical simulation. In *Proc. Second Joint EuroHaptics Conf. and Symp. on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems*, pp. 593–594, 2007.

[4] S. Capell, S. Green, B. Curless, T. Duchamp, and Z. Popović. Interactive skeleton-driven dynamic deformations. *ACM Trans. Graphics*, 21(3):586–593, 2002.

[5] S. Capell, S. Green, B. Curless, T. Duchamp, and Z. Popović. A multiresolution framework for dynamic deformations. In *Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*, pp. 41–47, 2002.

[6] G. Debunne, M. Desbrun, M.-P. Cani, and A. H. Barr. Dynamic real-time deformations using space and time adaptive sampling. In *Proc. SIGGRAPH 2001*, pp. 31–36, 2001.

[7] H. Delingette. Triangular springs for modeling nonlinear membranes. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, 14(2):329–341, 2008.

[8] G. Irving, J. Teran, and R. Fedkiw. Tetrahedral and hexahedral invertible finite elements. *Graphical Models*, 68(2):66–89, 2006.

[9] R. Kikuuwe, H. Tabuchi, and M. Yamamoto. An edge-based computationally efficient formulation of Saint Venant-Kirchhoff tetrahedral finite elements. *ACM Trans. Graphics*, 28(1):8:1–8:13, 2009.

[10] B. A. Lloyd, G. Székely, and M. Harders. Identification of spring parameters for deformable object simulation. *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics*, 13(5):1081–1094, 2007.

[11] C. Mendoza and C. Laugier. Tissue cutting using finite elements and force feedback. In *Proc. of the Int. Symp. in Surgery Simulation and Soft Tissue Modeling*, volume 2673 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 175–182. Springer, 2003.

[12] K. Miller, G. Joldes, D. Lance, and A. Wittek. Total Lagrangian explicit dynamics finite element algorithm for computing soft tissue deformation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23:121–134, 2007.

[13] M. Müller, J. Dorsey, L. McMillan, and R. Jagnow. Real-time simulation of deformation and fracture of stiff materials. In *Proc. Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation*, pp. 113–124, 2001.

[14] M. Müller, J. Dorsey, L. McMillan, R. Jagnow, and B. Cutler. Stable real-time deformations. In *Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*, pp. 49–54, 2002.

[15] M. Müller and M. Gross. Interactive virtual materials. In *Proc. Graphics Interface*, pp. 239–246, 2004.

[16] J. F. O'Brien and J. K. Hodgins. Graphical modeling and animation of brittle fracture. In *Proc. SIGGRAPH 99*, pp. 137–146, 1999.

[17] G. Picinbono, H. Delingette, and N. Ayache. Nonlinear anisotropic elasticity for real-time surgery simulation. *Graphical Models*, 65(5):305–321, 2003.

[18] J. Teran, S. Blemker, V. Ng Thow Hing, and R. Fedkiw. Finite volume methods for the simulation of skeletal muscle. In *Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation*, pp. 68–74, 2003.

[19] M. Teschner, B. Heidelberger, M. Müller, and M. Gross. A versatile and robust model for geometrically complex deformable solids. In *Proc. Computer Graphics Int. 2004*, pp. 312–319, 2004.

[20] A. Van Gelder. Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes. *J. Graphics Tools*, 3(2):21–42, 1998.

[21] H. Zhong, M. P. Wachowiak, and T. M. Peters. A real time finite element based tissue simulation method incorporating nonlinear elastic behavior. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8(3):177–189, 2005.

[22] Y. Zhuang and J. Canny. Haptic interaction with global deformations. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2428–2433, 2000.