



KYUSHU UNIVERSITY 100th 2011
知の新世紀を拓く

大変形が可能な 有限要素モデルと バネ質量モデルについて

九州大学大学院
工学研究院機械工学部門

きく　うえ　りょう

菊　植　亮

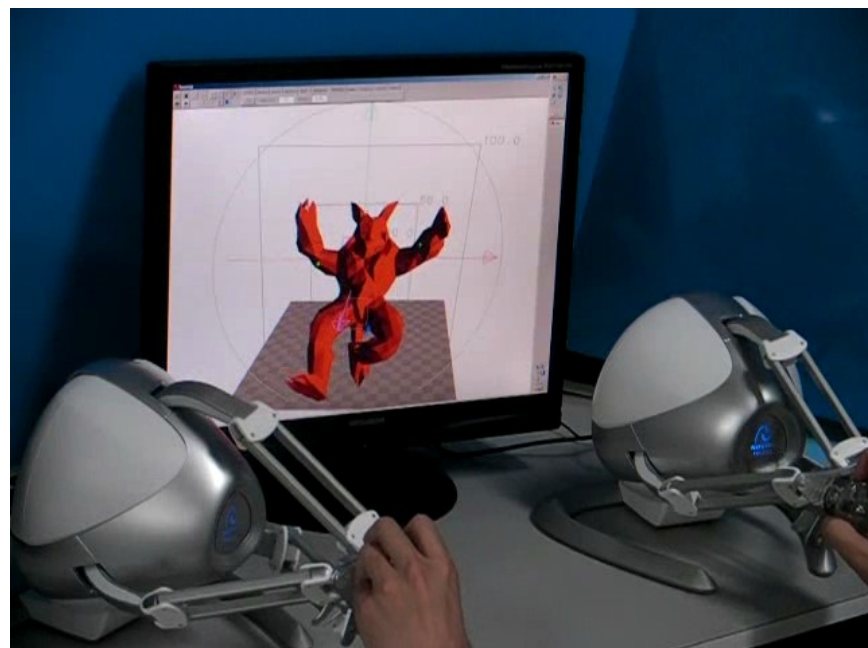
<http://rk.mech.kyushu-u.ac.jp/>



九州大学

柔軟物の実時間シミュレーション

- ◆ コンピュータ内の仮想物体に対して，入出力デバイスを介して力を加え，変形させる．
- ◆ 応用：手術シミュレータ，ゲーム，設計・編集ソフト，解析ソフト，など．



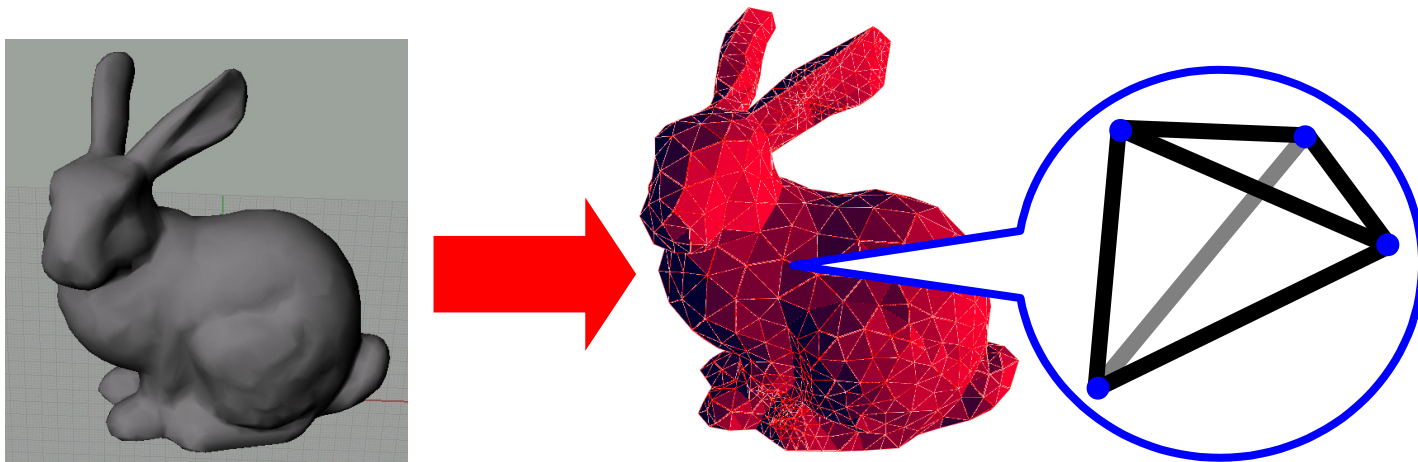
本発表の目的

- ◆ 非線形FEMの新しい表現について紹介
 - R. Kikuuwe et al.: “An Edge-Based Computationally Efficient Formulation of Saint Venant–Kirchhoff Tetrahedral Finite Elements,” ACM Transactions on Graphics, 28(1), pp.8:1–8:13, 2009.
- ◆ 既存の変形モデルの新しい数式での表現.
 - モデル自体は新しくない！！
 - 昔からある式を眺めていたら、もっと簡単に表せるということに気づいたという話.
- ◆ 非線形FEモデルとバネ質量モデルの解析的関係を明らかに.



柔軟体シミュレーションの方法

柔軟体シミュレーションの具体的手段



- ◆ **SNモデル** (バネネットワークモデル, バネ質量モデル)
 - コンセプト的に単純で, 計算量も少ない
 - 連続体力学と整合性がない.
 - パラメータの選定方法が不明確
- ◆ **FEモデル** (有限要素モデル)
 - 連続体力学的に妥当だが, 計算量が多い.

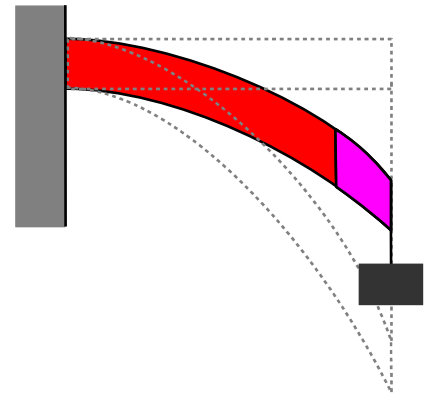
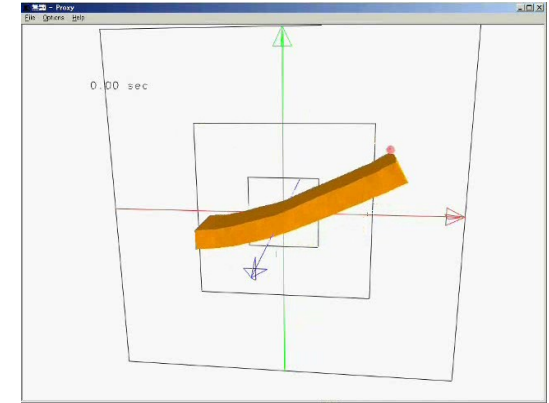
有限要素モデル

◆ 線形有限要素モデル

- 節点変位と節点力の関係が線形

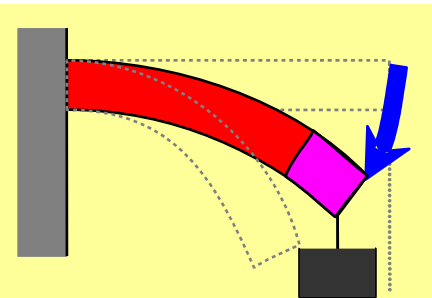
$$f = K(p - p^{ini})$$

- 大変形(要素の回転)において、物理的にありえない挙動



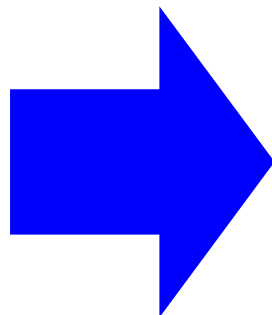
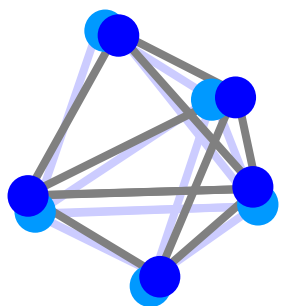
◆ 非線形有限要素モデル

- 材料的非線形性を含んだもの
 - 応力-ひずみ関係の非線形性 (ゴムなど)
- 幾何学的非線形性を含んだもの
 - 材料の物性値とは無関係に、大きな回転 (大変形, $\tan \theta \approx \theta$ が成立しないほど?) において生じる非線形性.

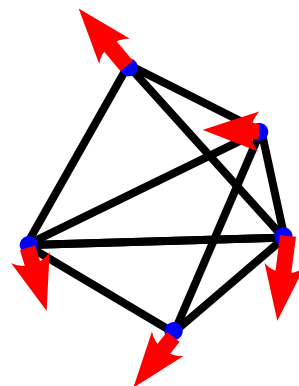
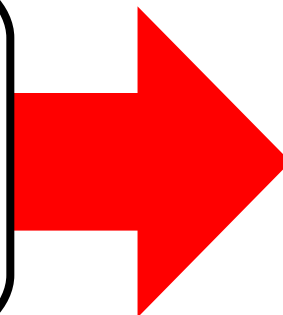




大変形に対応できるのは,



非線形FEモデル
or
SNモデル



$$p \in \mathbb{R}^{3n}$$

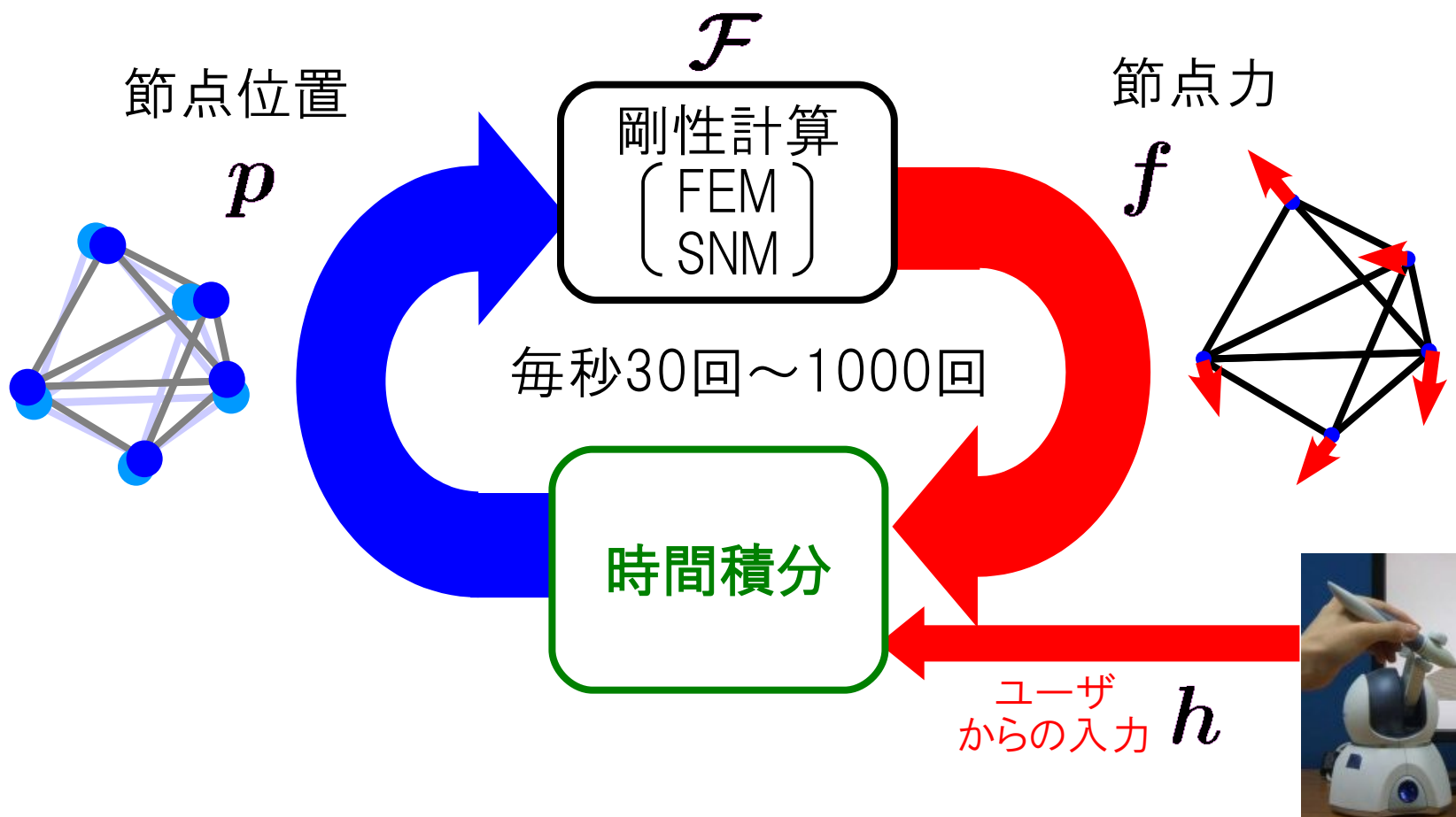
節点位置
(節点変位)

$$\mathcal{F}$$

$$f \in \mathbb{R}^{3n}$$

節点力
(節点に加わる弾性力)

柔軟体シミュレーションの方法：全体



$$M\ddot{p} + D\dot{p} + \mathcal{F}(p) = h$$

時間積分の方法

$$M\dot{v} + Dv + \mathcal{F}(p) = h, \dot{p} = v$$

◆ 陽解法（前進オイラー法）

- 不安定になりやすい


$$M(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1})/T + D\mathbf{v}_k + \mathcal{F}(\mathbf{p}_{k-1}) = h_k$$

◆ 陰解法（後退オイラー法）

- 剛性行列が必要

$$M(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1})/T + D\mathbf{v}_k + \mathcal{F}(\mathbf{p}_k) = h_k$$

テーラー展開 \Rightarrow

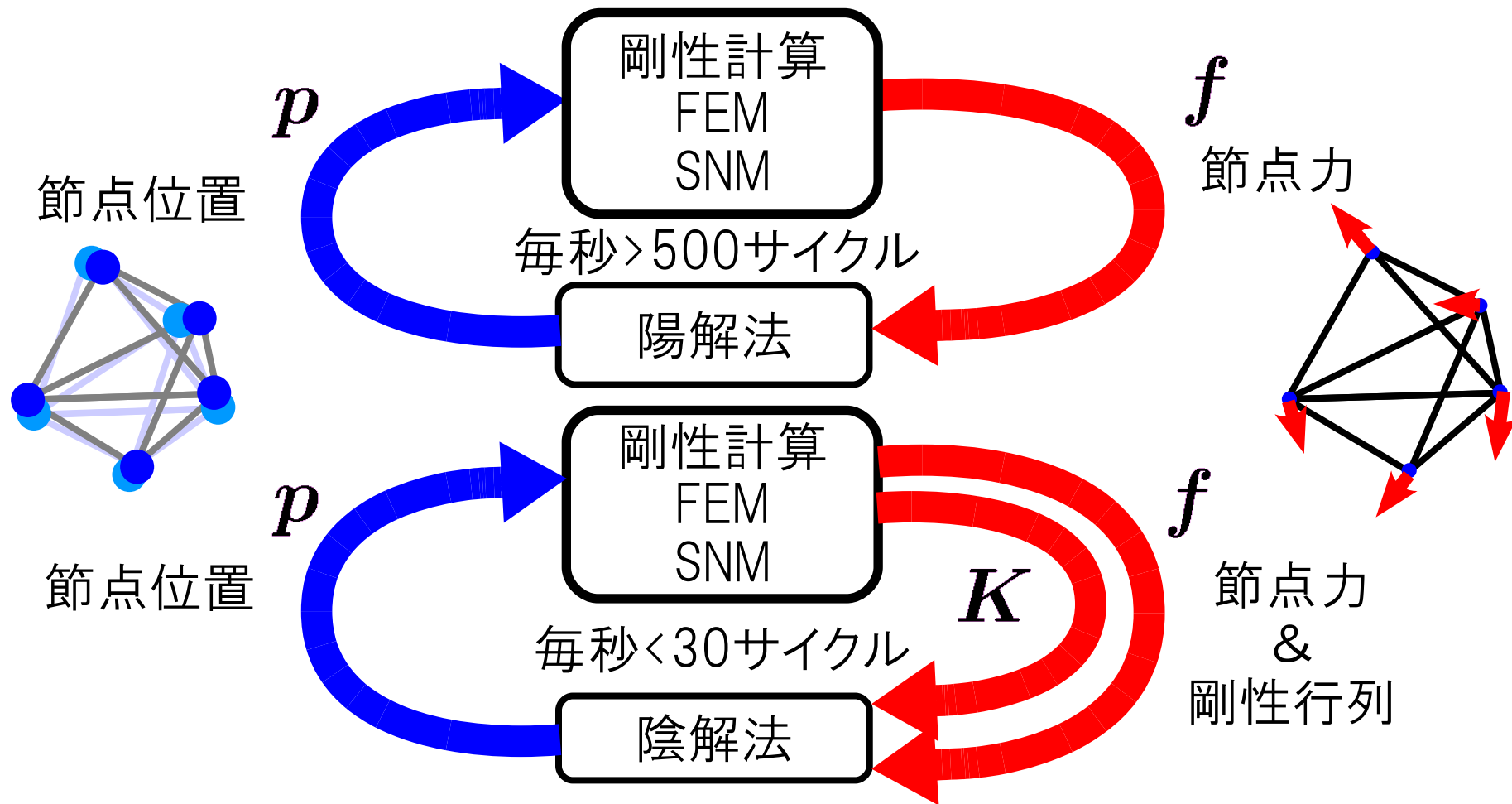

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}_{k-1} + T\mathbf{v}_k)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}_{k-1}) + T\mathcal{K}(\mathbf{p}_{k-1})\mathbf{v}_k$$

ヤコビ行列（剛性行列） \Rightarrow

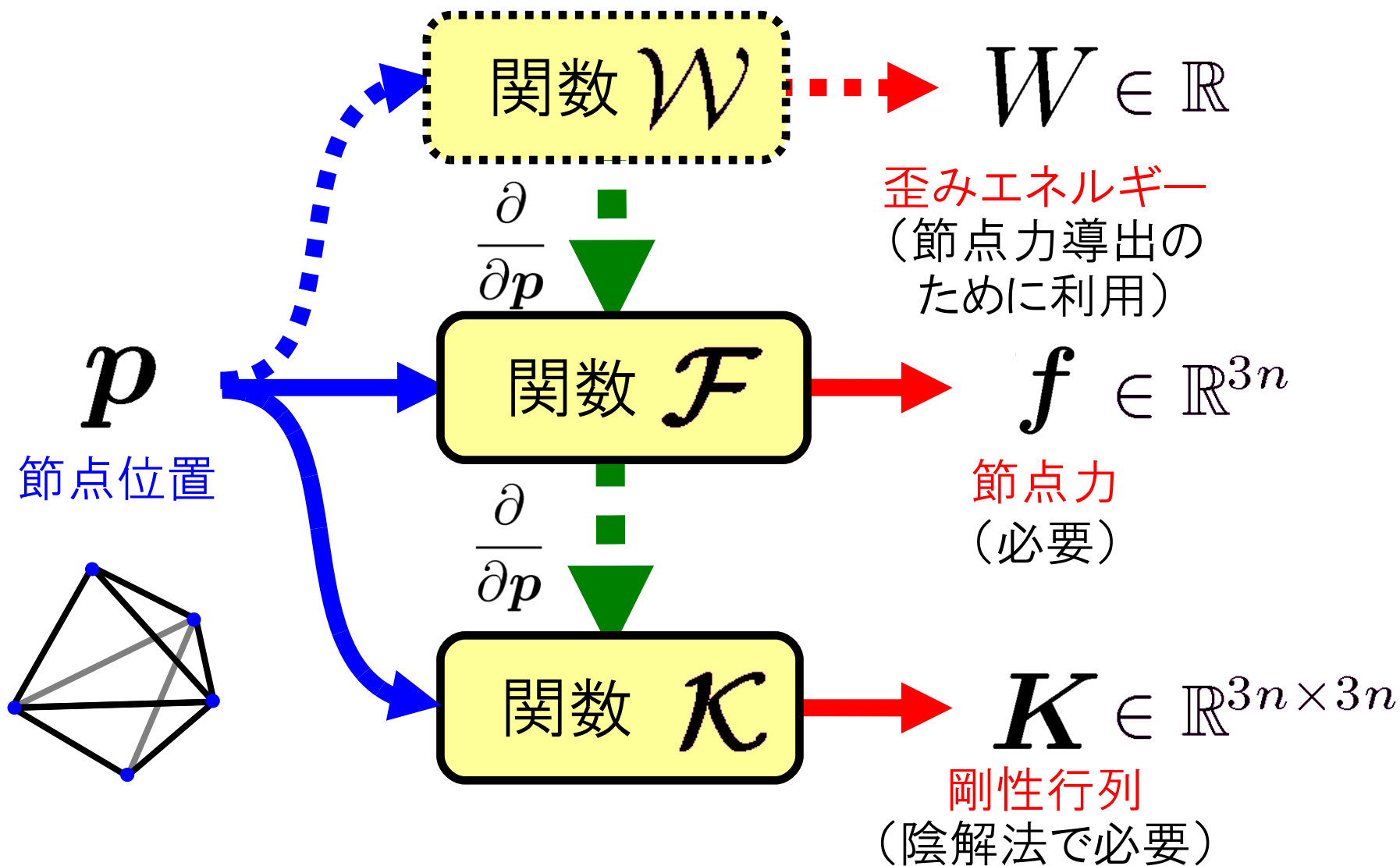
$$\text{ただし } \mathcal{K} = \partial\mathcal{F}/\partial p$$

陽解法と陰解法



- ◆ 陽解法: 不安定になりやすい
- ◆ 陰解法: 剛性行列が必要

弾性体 (FEモデルとSNモデルの両方)

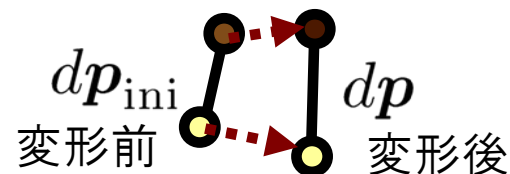




非線形FEモデル

幾何学的に非線形なFEモデル

- ◆ 最も単純な非線形弾性構成則: **StVK** (Saint Venant Kirchhoff) 材料則
- ◆ 実時間シミュレーションでも利用されている:
 - O'Brien & Hodgins [1999]
 - Mendoza & Laugier [2003]
 - Debunne et al. [2001]
 - Picinbono et al. [2003]
- ◆ ただし、ほとんどが陽解法での利用.



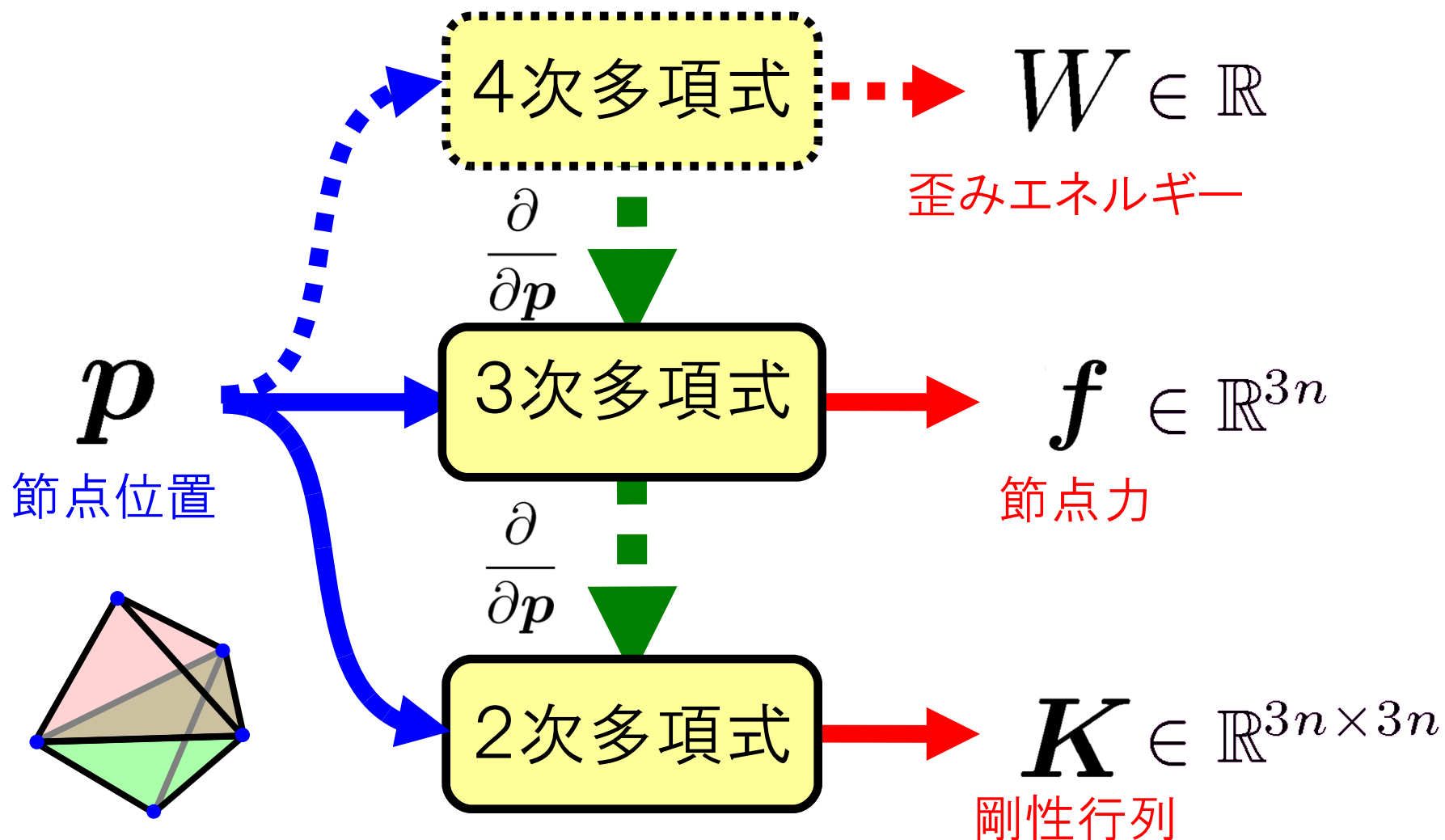
歪みテンソル

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_{ini}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_{ini}} - \mathbf{I} \right)$$

歪みエネルギー密度

$$W = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2)$$

StVK四面体FEモデル



StVK四面体FEモデルのための多項式

◆ 歪みエネルギー (4次式)

[Picinbono et al. '03]

$$W(\mathbf{T}_i) = \sum_{j,k} \mathbf{U}_j^t [B_{jk}^{\mathbf{T}_i}] \mathbf{U}_k + \sum_{j,k,l} (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{C}_{jkl}^{\mathbf{T}_i}) (\mathbf{U}_k \cdot \mathbf{U}_l) + \sum_{j,k,l,m} \mathcal{D}_{jklm}^{\mathbf{T}_i} (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{U}_k) (\mathbf{U}_l \cdot \mathbf{U}_m),$$

◆ 節点力 (3次式)

[Picinbono et al., '03]

$$\mathbf{F}^P(\mathbf{T}_i) = 2 \sum_j [B_{pj}^{\mathbf{T}_i}] \mathbf{U}_j + \text{線形FEMの5倍の計算時間} 4 \sum_{j,k,l} \mathcal{D}_{ijkl}^{\mathbf{T}_i} \mathbf{U}_l \mathbf{U}_k^t \mathbf{U}_j$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_c} = 2A_1^{ca} \mathbf{q}_a + A_2^{ac} \mathbf{q}_a + B^{ac} \mathbf{q}_a + 2\mathbf{q}_d (C_2^{cad}) + (\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b) C_1^{cab} + \mathbf{q}_a (\mathbf{q}_d \cdot C_2^{acd}) + \mathbf{q}_a (\mathbf{q}_d \cdot C_2^{cad}) + (\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b) C_2^{bac} + \mathbf{q}_d (\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b) D_1^{abcd} + \mathbf{q}_a (\mathbf{q}_d \cdot \mathbf{q}_e) D_2^{adce}$$

上記と同じ

[Capell et al. SIGGRAPH'02]

$$\mathbf{f}_{[i]}^{(\epsilon)} = \frac{\text{vol}}{2} \sum_{j=1}^4 \mathbf{p}_{[j]} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 \text{陽解法でよく利用されている (e.g., Mendoza & Laugier [2003])}$$

[O'Brien & Hodgins '99]

◆ 剛性行列 (2次式)

[Capell et al. SIGGRAPH'02]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{q}_c \partial \mathbf{q}_f} = 2A_1^{cf} + A_2^{fc} + IB^{fc} + 2I (\mathbf{q}_a \cdot C_1^{afc}) + 2\mathbf{q}_d \otimes C_1^{fdc} + 2C_1^{cfb} \otimes \mathbf{q}_b + I (\mathbf{q}_d \cdot C_2^{fcd}) + \mathbf{q}_a \otimes (C_2^{acf} + I (\mathbf{q}_d \cdot C_2^{afd})) + C_2^{caf} \otimes \mathbf{q}_a + C_2^{bfc} \otimes \mathbf{q}_b + I (\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b) D_1^{abcf} + 2(\mathbf{q}_d \otimes \mathbf{q}_a) D_1^{afcd} + I (\mathbf{q}_d \cdot \mathbf{q}_e) D_2^{fdce} + (\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_d) D_2^{adcf} + (\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_e) D_2^{afce}$$

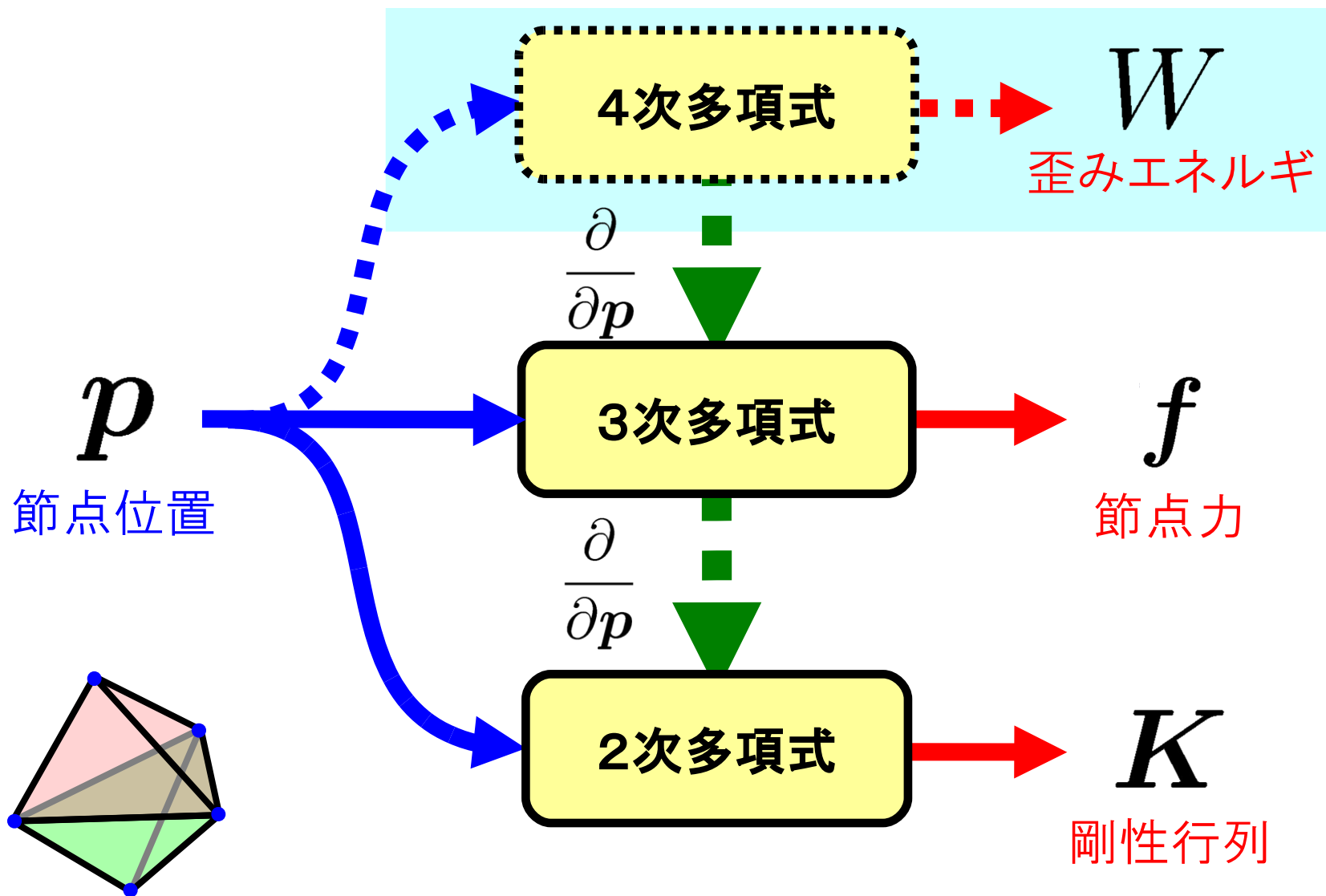
使われていない



StVK四面体FEモデル の 新しい表現と計算方法

[Kikuuwe et al., 2009]

StVK四面体FEモデル



四面体の歪みエネルギー

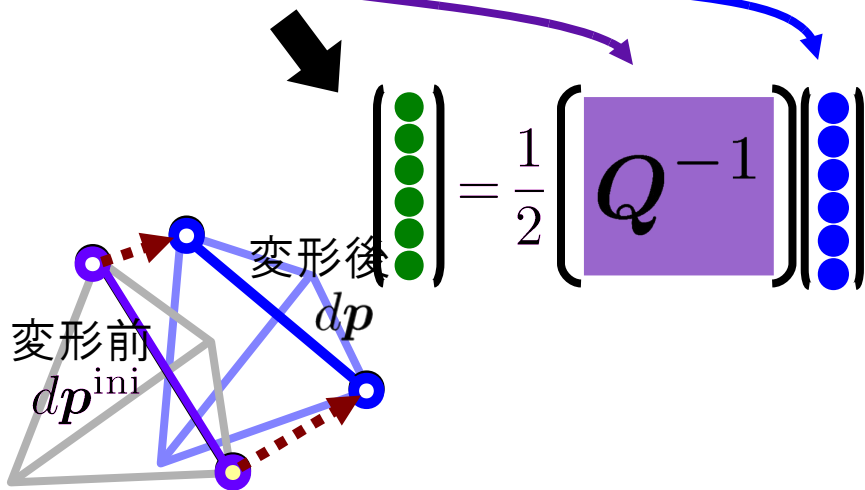
◆ Green-Lagrange歪み

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_{ini}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}_{ini}} - \mathbf{I} \right)$$

$$(\mathbf{d}\mathbf{p}^{ini})^T \mathbf{E} \mathbf{d}\mathbf{p}^{ini} = \frac{1}{2} (\|\mathbf{d}\mathbf{p}\|^2 - \|\mathbf{d}\mathbf{p}^{ini}\|^2)$$

● 長さの二乗の変化量

初期長さ



◆ 四面体の歪みエネルギー

$$W_{\mathcal{T}} = V_{\mathcal{T}} \left(\frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2) \right)$$

$$W_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} V_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 \\ & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

sym

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

sym

$$W_{\mathcal{T}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$$

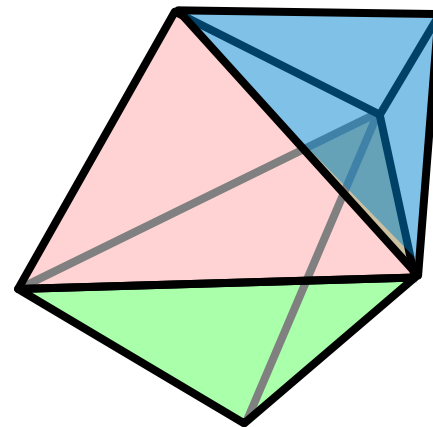
sym

- ◆ 「●」の2次式として表現できる.
- ◆ 辺の長さの双二次形式

メッシュ全体の歪みエネルギー

$$W = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{blue vector} \\ \text{matrix } L \\ \text{blue vector} \end{array} \right)^T + \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{pink vector} \\ \text{matrix} \\ \text{pink vector} \end{array} \right)^T + \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{green vector} \\ \text{matrix} \\ \text{green vector} \end{array} \right)^T$$

$$= \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{grey vector} \\ \text{matrix } L \\ \text{grey vector} \end{array} \right)^T$$



$$= \underbrace{\sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}} \frac{1}{4} L(\mathcal{E}) \zeta(\mathcal{E})^2}_{\text{対角成分}} + \underbrace{\sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \frac{1}{2} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))}_{\text{非対角成分}}$$

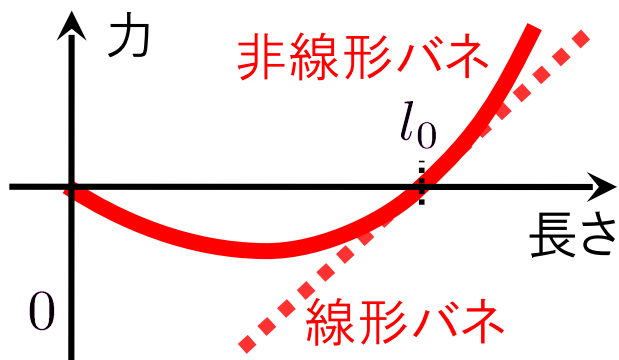
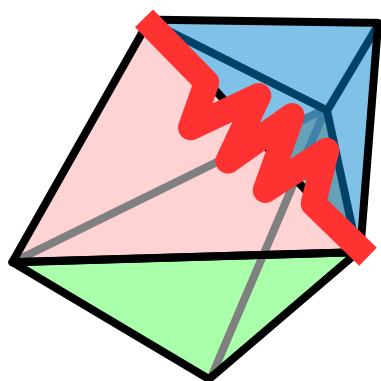
対角成分

非対角成分

対角成分：非線形バネのネットワーク

$$W = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{---} & & & \\ & \text{---} & & \\ & & \text{---} & \\ & & & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}} \frac{1}{4} L(\mathcal{E}) \zeta(\mathcal{E})^2 + \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \frac{1}{2} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))$$



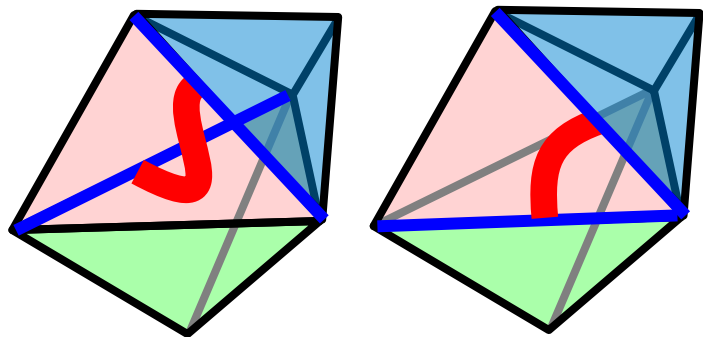
◆ 非線形バネ

- 力は変位の三次式
- ポテンシャルエネルギーは変位の四次式

それ以外：辺の対 (TSEP) の効果

$$W = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{red} \\ \text{blue} \\ \text{green} \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{ccc} \text{red} & \text{blue} & \text{green} \\ \text{blue} & \text{red} & \text{green} \\ \text{green} & \text{green} & \text{red} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{red} \\ \text{blue} \\ \text{green} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}} \frac{1}{4} L(\mathcal{E}) \zeta(\mathcal{E})^2 + \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \frac{1}{2} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))$$



- ◆ TSEP = Tetrahedron-Sharing Edge Pair (四面体を共有する辺の対)
- ◆ 非線形FEMを非線形SNモデルと「それ以外」の和として表現.

弾性エネルギーを偏微分すると・・・

◆ 節点力 (3次式)

$$\blacksquare \quad f(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{\mathcal{E} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 0) = \mathcal{V}}} \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) g(\mathcal{E}) - \sum_{\substack{\mathcal{E} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 1) = \mathcal{V}}} \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) g(\mathcal{E})$$

$$g(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}) \zeta(\mathcal{E}) + \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1) = \mathcal{E}}} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) + \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0) = \mathcal{E}}} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))$$

$$\zeta(\mathcal{E}) \triangleq \|\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E})\|^2 - \|\tilde{\mathbf{p}}^{\text{ini}}(\mathcal{E})\|^2$$

◆ 接線剛性行列 (2次式)

$$\blacksquare \quad \mathbf{K}(\mathcal{E}) = -g(\mathcal{E}) \mathbf{I}_3 - 2\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) L(\mathcal{E}) \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E})^T$$

$$+ \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j) = \mathcal{E} \wedge s(\mathcal{P}, i, j) = 1}} \sum_{i \in \{0, 1\}} \sum_{j \in \{0, 1\}} (-1)^{i+j} \mathbf{K}_p(\mathcal{P}) + \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j) = \mathcal{E} \wedge s(\mathcal{P}, i, j) = -1}} \sum_{i \in \{0, 1\}} \sum_{j \in \{0, 1\}} (-1)^{i+j} \mathbf{K}_p(\mathcal{P})^T$$

$$\mathbf{K}_p(\mathcal{P}) \triangleq 2\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) L(\mathcal{P}) \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))^T$$

$$\mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j) \triangleq \mathcal{E}_v(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0), i), \mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1), j))$$

$$s(\mathcal{P}, i, j) \triangleq \text{t}(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0), i), \mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j)).$$

アルゴリズム (非線形FEモデル)

節点位置

p



Algorithm. algF [p]

```

// depending on  $\{H(\mathcal{E}), L(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}, \{L(\mathcal{P})\}_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}}$ 
FOR  $\mathcal{V} \in \mathcal{M}$ ;  $f(\mathcal{V}) := \mathbf{o}_3$ 
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $\tilde{p}(\mathcal{E}) := p(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 0)) - p(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 1))$ 
   $\zeta(\mathcal{E}) := \|\tilde{p}(\mathcal{E})\|^2 - H(\mathcal{E})$ 
   $g(\mathcal{E}) := L(\mathcal{E})\zeta(\mathcal{E})$ 
END FOR
FOR  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ 
   $g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1)) += L(\mathcal{P})\zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0))$ 
   $g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) += L(\mathcal{P})\zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))$ 
END FOR
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $f_{\text{tmp}} := \tilde{p}(\mathcal{E})g(\mathcal{E})$ 
   $f(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 0)) += f_{\text{tmp}}$ 
   $f(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 1)) -= f_{\text{tmp}}$ 
END FOR
RETURN [ $f, \{\tilde{p}(\mathcal{E}), g(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$ ]
    
```

Algorithm. algKE [$\{\tilde{p}(\mathcal{E}), g(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$]

```

// depending on:  $\{L(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}, \{L(\mathcal{P})\}_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}}$ 
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $K(\mathcal{E}) := -g(\mathcal{E})\mathbf{I}_3 - 2\tilde{p}(\mathcal{E})L(\mathcal{E})\tilde{p}(\mathcal{E})^T$ 
END FOR
FOR  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ 
   $K_p := 2\tilde{p}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0))L(\mathcal{P})\tilde{p}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))^T$ 
  FOR  $i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1\}$ 
    IF  $s(\mathcal{P}, i, j) = 1$ 
       $K(\mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j)) += (-1)^{i+j} K_p$ 
    ELSE IF  $s(\mathcal{P}, i, j) = -1$ 
       $K(\mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P}, i, j)) += (-1)^{i+j} K_p^T$ 
    END IF
  END FOR
END FOR
RETURN [ $\{K(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$ ].
    
```

節点力 f

剛性行列 K

アルゴリズム (非線形SNモデル)

節点位置

p



Algorithm. algF [p]

```
// depending on  $\{H(\mathcal{E}), L(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}, \{L(\mathcal{P})\}_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}}$ 
FOR  $\mathcal{V} \in \mathcal{M}$ ;  $f(\mathcal{V}) := \mathbf{o}_3$ 
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $\tilde{p}(\mathcal{E}) := p(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 0)) - p(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 1))$ 
   $\zeta(\mathcal{E}) := \|\tilde{p}(\mathcal{E})\|^2 - H(\mathcal{E})$ 
   $g(\mathcal{E}) := L(\mathcal{E})\zeta(\mathcal{E})$ 
END FOR
```

```
FOR  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ 
   $g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) := g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0)) + g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0))$ 
   $g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1)) := g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1)) - g(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))$ 
END FOR
```

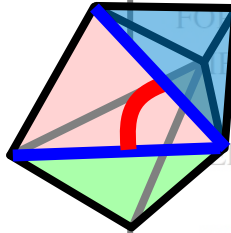
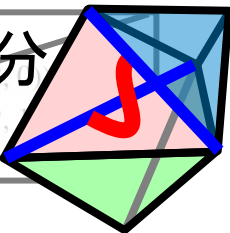
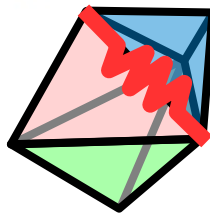
```
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $f_{tmp} := \tilde{p}(\mathcal{E})g(\mathcal{E})$ 
   $f(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 0)) += f_{tmp}$ 
   $f(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}, 1)) -= f_{tmp}$ 
END FOR
RETURN [ $f, \{\tilde{p}(\mathcal{E}), g(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$ ]
```

Algorithm. algKE [$\{\tilde{p}(\mathcal{E}), g(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$]

```
// depending on:  $\{L(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}, \{L(\mathcal{P})\}_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}}$ 
FOR  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}$ 
   $K(\mathcal{E}) := -g(\mathcal{E})\mathbf{I}_3 - 2\tilde{p}(\mathcal{E})L(\mathcal{E})\tilde{p}(\mathcal{E})^T$ 
END FOR
```

```
FOR  $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ 
   $K_p := 2\tilde{p}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 0))L(\mathcal{P})\tilde{p}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}, 1))^T$ 
  FOR  $i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1\}$ 
    IF  $i \neq j$ 
       $K_p(i, j) = 1$ 
    ELSE IF  $i = j = 0$ 
       $K_p(i, j) = 1$ 
    ELSE IF  $i = j = 1$ 
       $K_p(i, j) = -1$ 
    END IF
  END FOR
END FOR
```

```
RETURN [ $\{K(\mathcal{E})\}_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}}$ ].
```



非対角成分 (TSEPs)

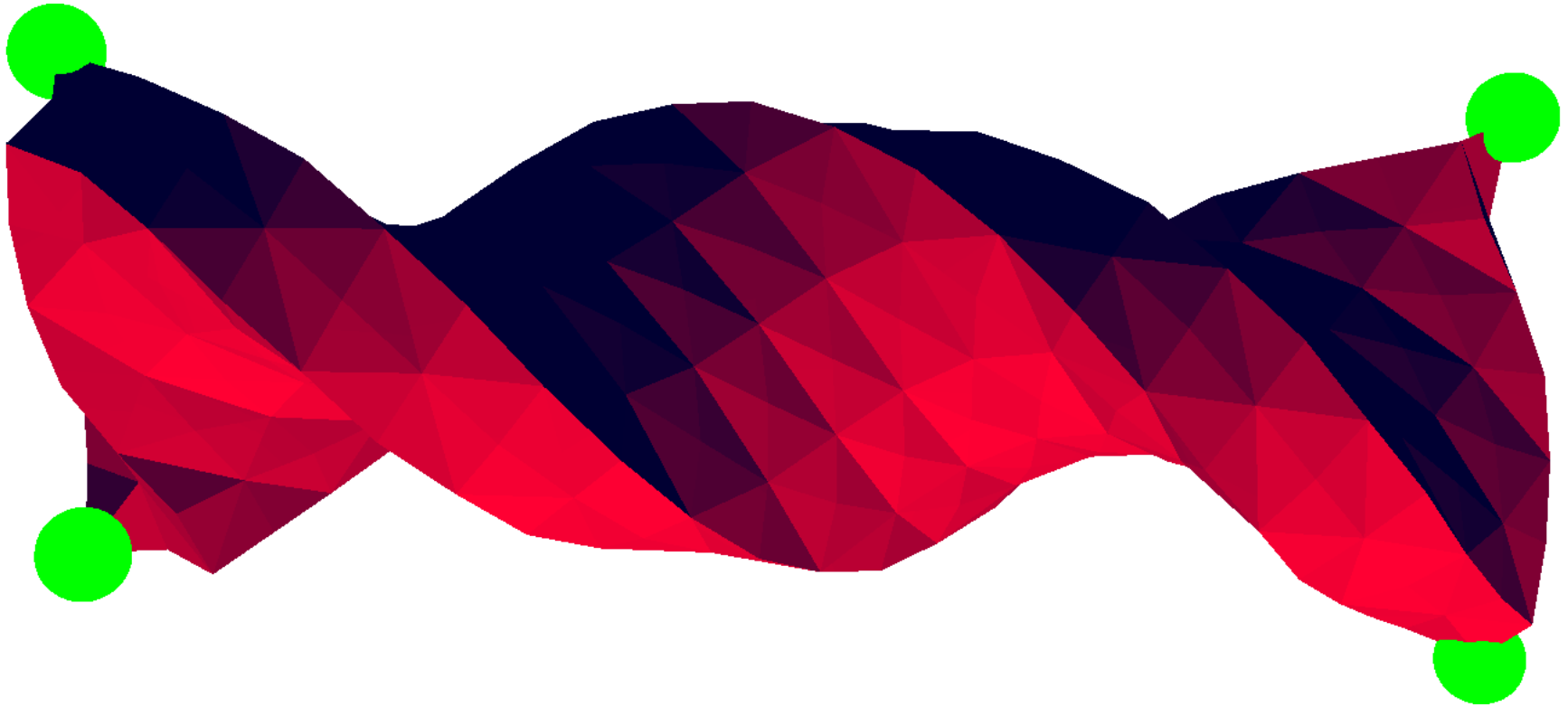
非対角成分 (TSEPs)

節点力 f

剛性行列 K



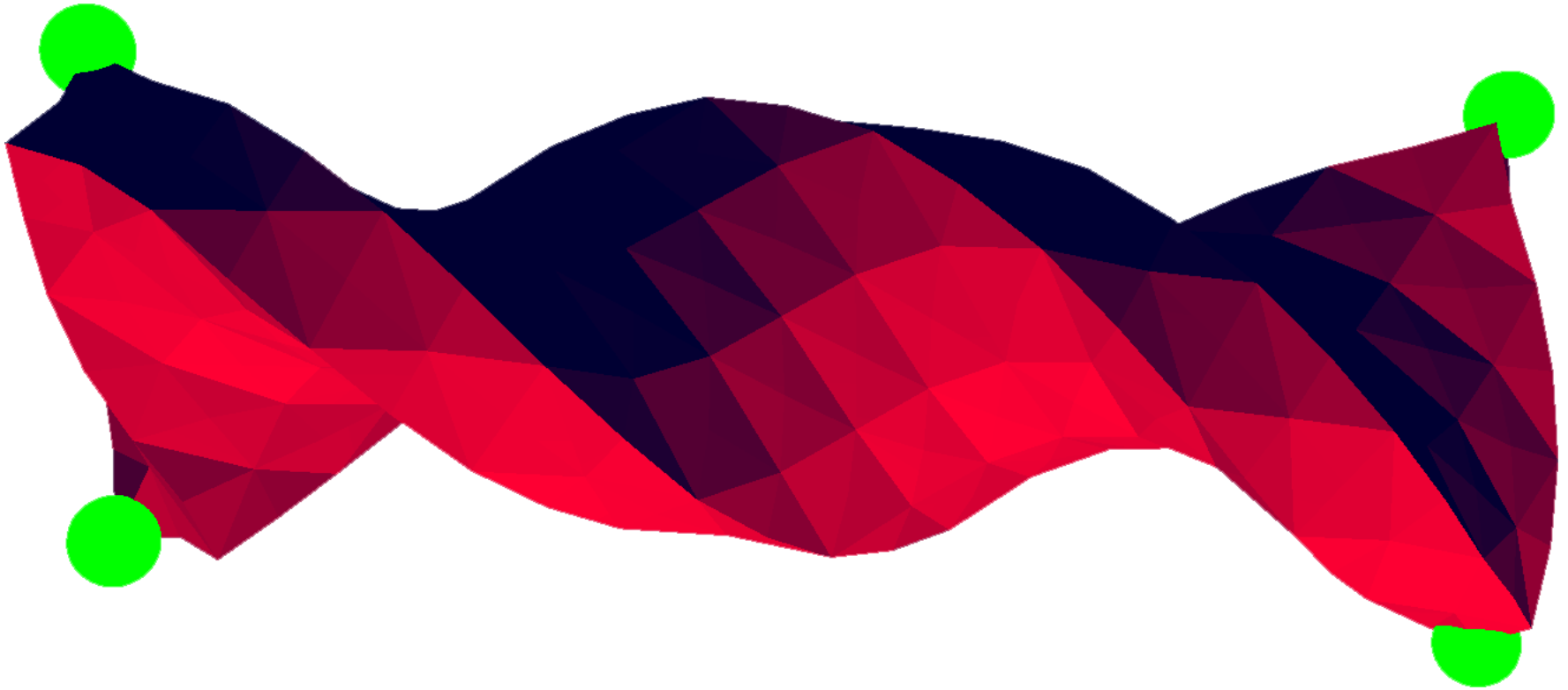
FEM vs. SNM (TSEPの有 vs. 無)



- ◆ 膨張:FEM \Leftrightarrow 縮小:SNM
- ◆ 無視できる違いか否か? \rightarrow 用途による?



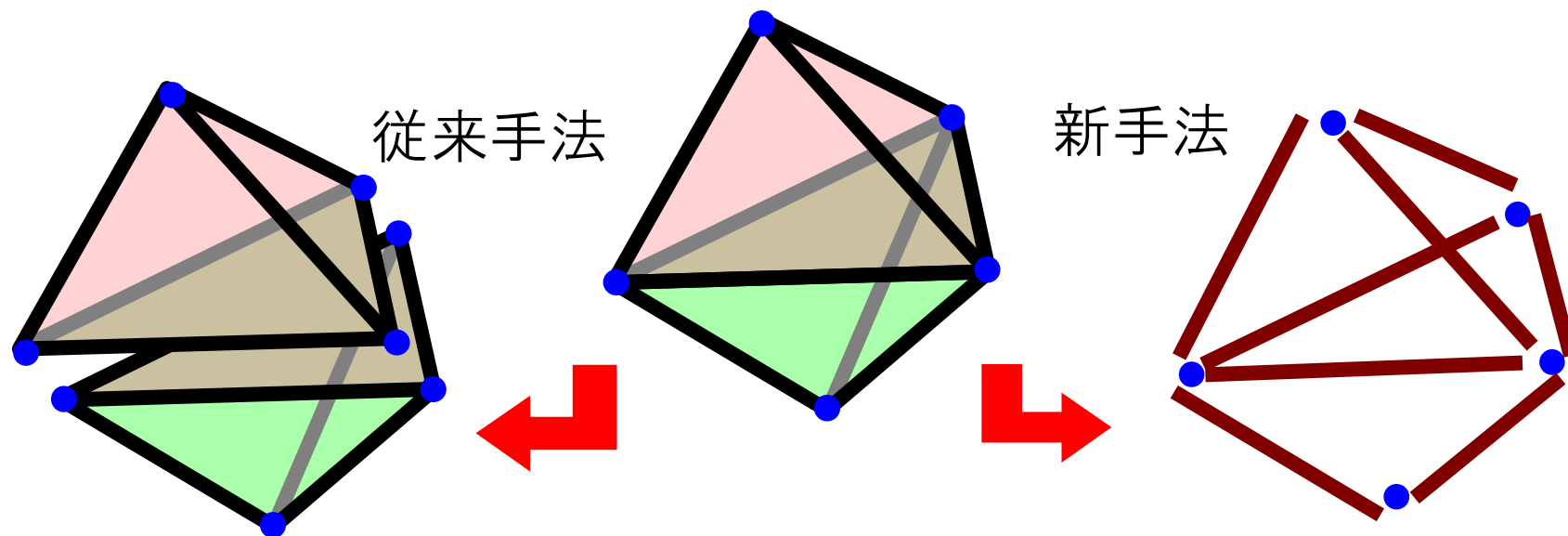
FEM vs. SNM (TSEPの有 vs. 無)



- ◆ 膨張:FEM \Leftrightarrow 縮小:SNM
- ◆ 無視できる違いか否か? \rightarrow 用途による?

新しい計算法の直感的な解釈

- ◆ 四面体ごとにではなく、「辺」と「辺のペア(TSEP)」ごとに接点力(f)と剛性行列(K)を計算.



- ◆ 旧手法: 四面体ごとの展開された多項式の計算
- ◆ 新手法: メッシュ全体で**因数分解**された多項式の計算

類似の論文: [Delingette, ISBMS'08]

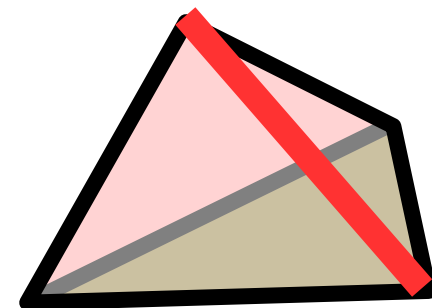
- 2008年7月出版. 我々の論文投稿の直後

非線形バネ

$$W^{TBS}(\mathcal{T}_P) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}(\mathcal{T})} \frac{k_{i,j}^{TP}}{4} (\Delta^2 l_{i,j})^2$$

伸縮の剛性

“tensile stiffness”

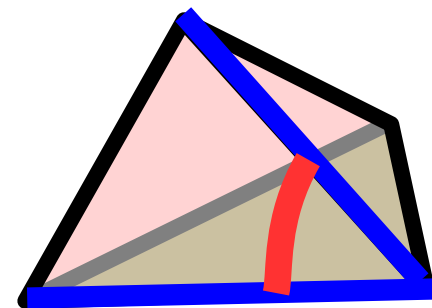


TSEP

$$+ \sum_{((i,j),(i,k)) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})} \frac{c_{[i],[j,k]}^{TP}}{2} \Delta^2 l_{i,j} \Delta^2 l_{i,k}$$

角度の剛性

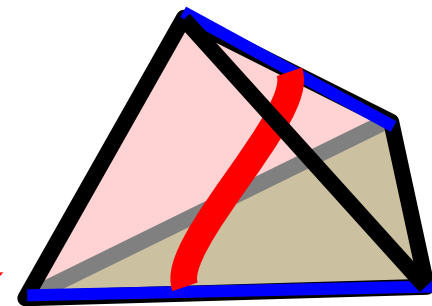
“angular stiffness”



$$+ \sum_{((i,j),(k,l)) \in \mathcal{O}(\mathcal{T})} \frac{d_{[i,j],[k,l]}^{TP}}{2} \Delta^2 l_{i,j} \Delta^2 l_{k,l}$$

体積の剛性

“volumetric stiffness”





計算回数の比較

比較

◆ 従来の方法 (TL-FEM; Total Lagrangian 法)

$$\mathbf{f}_{[i]}^{(\epsilon)} = \frac{\text{vol}}{2} \sum_{j=1}^4 \mathbf{p}_{[j]} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \beta_{jl} \beta_{ik} \sigma_{kl}^{(\epsilon)}$$

$$\sigma_{ij}^{(\epsilon)} = \sum_{k=1}^3 \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

[O'Brien & Hodgins, 1999]

簡単に導出

$$\mathbf{K}_T = \frac{C_T^{\text{ini}}}{6} \mathbf{B}_T^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_T + \begin{bmatrix} g_{T,00} \mathbf{I}_3 & \cdots & g_{T,03} \mathbf{I}_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{T,03} \mathbf{I}_3 & \cdots & g_{T,33} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_T \triangleq \mathbf{B}_T^{\text{ini}} \text{blockdiag}[\mathbf{F}_T^T, \mathbf{F}_T^T, \mathbf{F}_T^T, \mathbf{F}_T^T]$$

$$g_{T,ij} = (C_T^{\text{ini}}/6) \alpha_T^{\text{ini}}(\mathcal{V}_j)^T \mathbf{S}_T \alpha_T^{\text{ini}}(\mathcal{V}_i)$$

$\partial/\partial \mathbf{p}$

◆ 新手法 (New FEM)

$$f(\mathcal{V}) = \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}} \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) g(\mathcal{E}) - \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{M}} \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) g(\mathcal{E})$$

$$g(\mathcal{E}) = L(\mathcal{E}) \zeta(\mathcal{E}) + \sum_{\substack{\mathcal{P} \in \mathcal{M} \\ \mathcal{E}_n(\mathcal{P},1) = \mathcal{E}}} L(\mathcal{P}) \zeta(\mathcal{E}_p(\mathcal{P}))$$

$$\zeta(\mathcal{E}) \triangleq \|\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E})\|^2 - \|\tilde{\mathbf{p}}^{\text{ini}}(\mathcal{E})\|^2$$

$$\mathbf{K}(\mathcal{E}) = -g(\mathcal{E}) \mathbf{I}_3 - 2\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}) L(\mathcal{E}) \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E})^T$$

$$+ \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \{0,1\}} \sum_{j \in \{0,1\}} (-1)^{i+j} \mathbf{K}_p(\mathcal{P}) + \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{M}} \sum_{i \in \{0,1\}} \sum_{j \in \{0,1\}} (-1)^{i+j} \mathbf{K}_p(\mathcal{P})^T$$

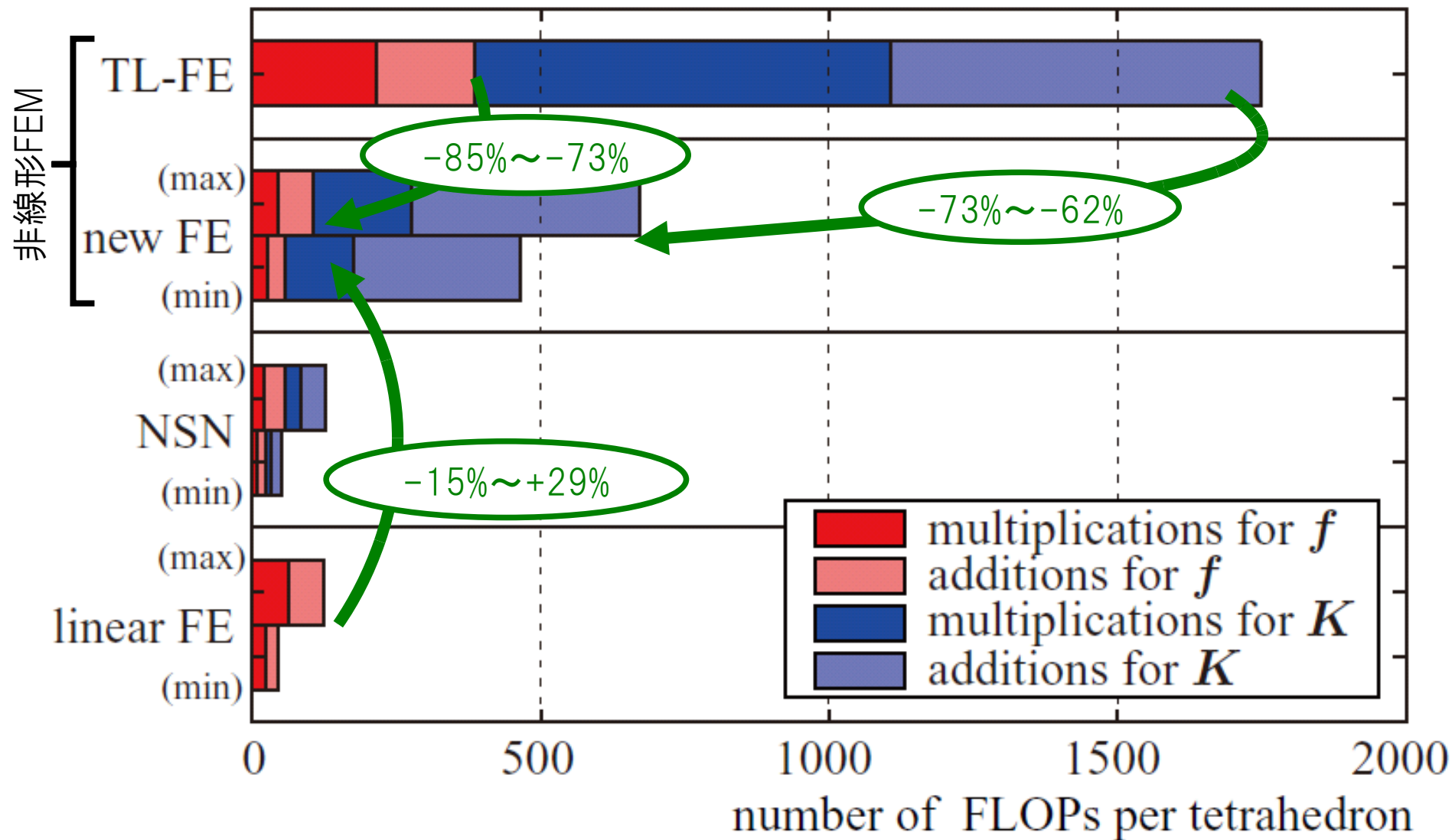
$$\mathbf{K}_p(\mathcal{P}) \triangleq 2\tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P},0)) L(\mathcal{P}) \tilde{\mathbf{p}}(\mathcal{E}_p(\mathcal{P},1))^T$$

$$\mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P},i,j) \triangleq \mathcal{E}_v(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P},0),i), \mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P},1),j))$$

$$s(\mathcal{P},i,j) \triangleq t(\mathcal{V}_e(\mathcal{E}_p(\mathcal{P},0),i), \mathcal{E}_{p2}(\mathcal{P},i,j)).$$

$\partial/\partial \mathbf{p}$

FLOP数の比較





計算時間の比較

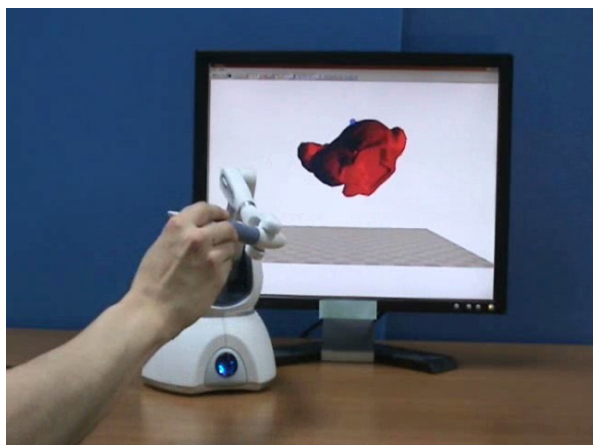
実装例



(a) 直方体
四面体数1,200



(b) 恐竜
四面体数2,458

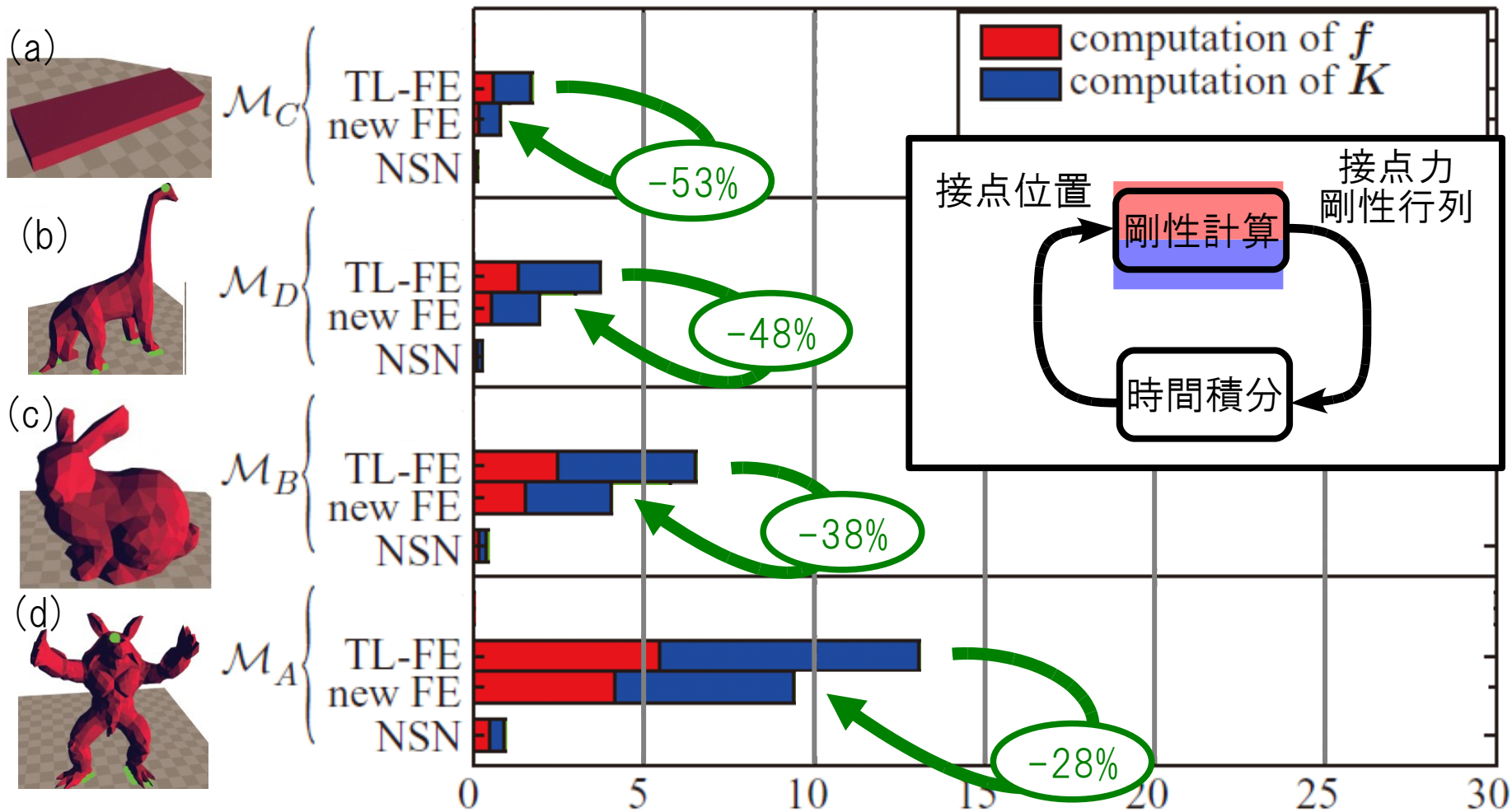


(c) スタンフォード・バニー:
四面体数4,064



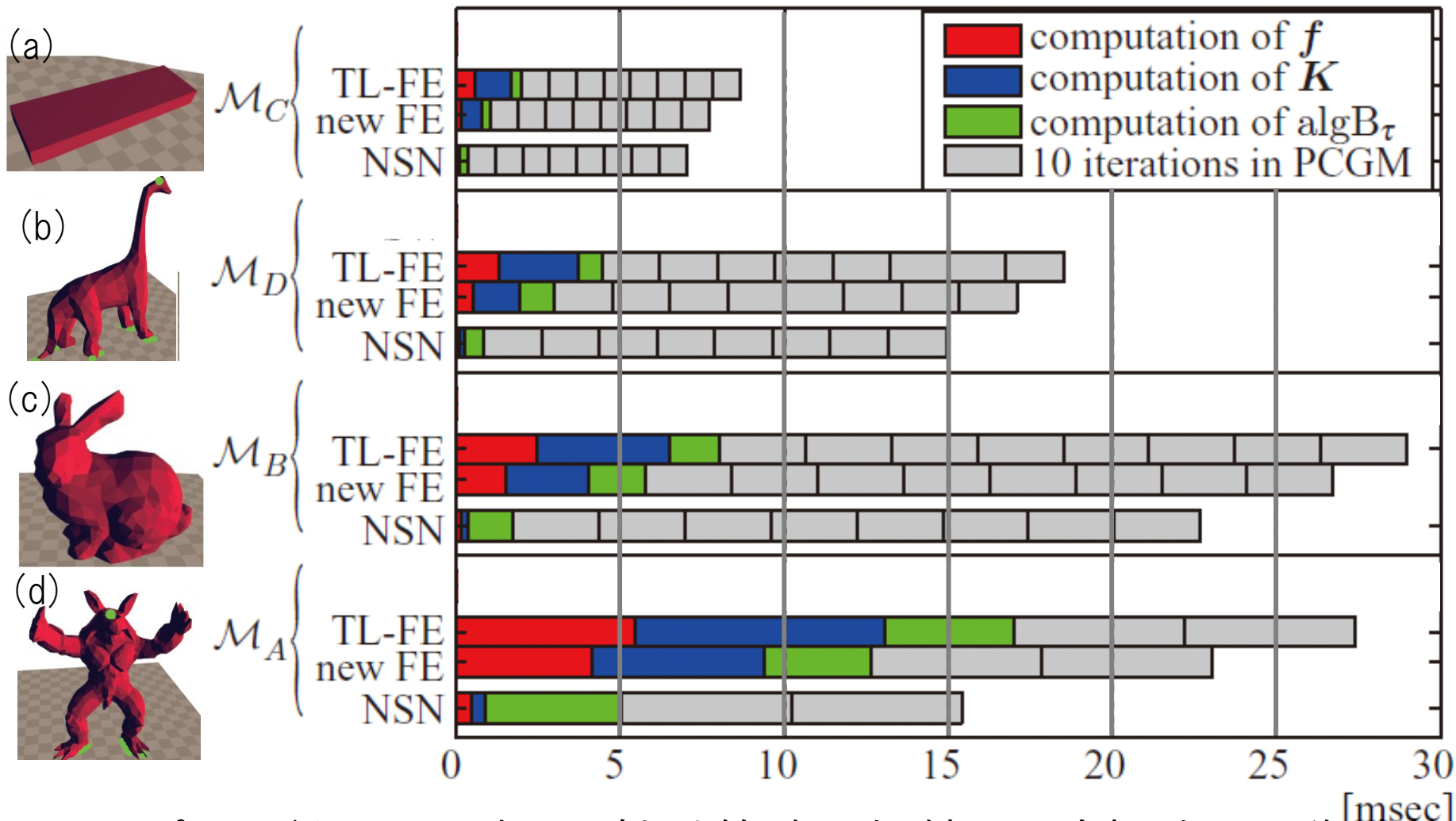
(d) スタンフォード・アルマジロ:
四面体数7,554

計算時間(f とKの算出)



- ◆ 接点力と剛性係数の計算時間は3割～5割減。^[msec]
 - 6割～7割減には至らない。メモリ配置の最適化が必要か？

計算時間(時間積分含む)



- ◆ サンプルングタイム固定, 剛性計算時間短縮 → 陰解法の反復演算の回数を増やすことが可能 → おそらく過渡応答がリアルに



まとめ

まとめ

- ◆ StVK四面体有限要素の新しい表現を紹介
- ◆ 学術的な利点：
 - 双二次形式に基づいた新しい表現
 - バネ・ネットワークモデルとの明確な関係.
- ◆ 実用的な利点：
 - 従来手法よりも計算が速い
 - ただし, 陰解法ではこの効果はそれほど大きくない.
 - メモリ参照の最適化が必要
 - バネ・ネットワークモデルを用いるときに, バネ定数の決定のための参照モデルとして利用可能.

今後の研究課題

- ◆ 演算回数は6割～7割減だが，計算時間は（現在のところ）3割～5割減程度。
 - おそらく，メモリ配置などプログラム全体の最適化が必要。
- ◆ 並列計算機への実装方法の確立も必要
 - マルチコアCPU，マルチCPU，GPUなど。
- ◆ 薄膜状物体および破壊・切断についても検討中。

