RSJ2012AC4K2-6

# 常微分方程式で表す摩擦と接触

熊 小剛，○菊植 亮，山本 元司（九州大学）

## 1.　はじめに

クーロン摩擦と剛体接触（片側拘束）を含む機械システムは微分包含式（Differential Inclusions）と呼ばれる数式で表現できる．微分包含式は微分方程式のひとつの一般化であり，不連続性を含む微分方程式であるともいえる．微分包含式を時間積分する方法としては，大きく分けて拘束ベースの手法とペナルティベースの手法がある．拘束ベースの手法では，オイラー法やそれに類似の方法によって微分包含式を離散時間表現に近似し，その表現を連立方程式あるいは連立不等式として解くことによって，1 ステップ時間毎の状態変数の値を決定する．一般にこの手法では，多自由度の代数的問題を数値的に解く必要があるので，必要な計算量が大きい．また，Runge-Kutta 法などの，より高次な時間積分法を使うことができない．

一方，ペナルティベースの手法は，滑らかな連続関数を用いて微分包含式を近似する手法である．この手法は実装が簡便であるため，特に実時間性が要求される力覚提示などの用途によく用いられる．しかし，連続関数を用いた近似の際に，微分包含式が本質的に持つ不連続な特性が失われ，物理的にありえない不自然な挙動を生じることがある．たとえば，静止摩擦状態においても最大静止摩擦力以下の外力で物体が際限なく変位したり，片側拘束の際に負の反力（吸着力）が発生したりすることがある．

菊植ら [1, 2] は，ペナルティベースの手法で後退オイラー法を用いることで，上記のような不自然な挙動を生じないシミュレーション手法を提案している．しかしこの手法では，オイラー法以外の高次の積分法を使えないという課題が残っていた．

本稿では，クーロン摩擦と剛体接触を含む力学システムを，常微分方程式で近似的に表現する新たな手法を示す．この手法は，与えられた微分包含式をある決められた手順で常微分方程式に書き換えるというものである．この手法は，常微分方程式と等価な微分代数包含式によって微分包含式が近似できるという点に着目して導出された．微分包含式が本来持つ不連続性に由来する特性が保存され，従来のペナルティベースの手法で生じていたような不自然な挙動を生じないという特徴を持つ．

## 2.　数学的準備

本稿では，$\mathbb{R}$ はすべての実数の集合，$\mathbb{R}_+$ はすべての非負の実数の集合を表す．本稿の議論で用いるために，下記の関数を定義する．

$$\mathrm{sgn}(x) \triangleq \begin{cases} x/\|x\| & \text{if } \|x\| \neq 0 \\ \{z \in \mathbb{R}^r \mid \|z\| \leq 1\} & \text{if } \|x\| = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathrm{sat}(Z, x) \triangleq \begin{cases} Zx/\|x\| & \text{if } \|x\| > Z \\ x & \text{if } \|x\| \leq Z \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathrm{dio}(x) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{if } x > 0 \\ \mathbb{R}_+ & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$（$r \in \{1, 2\}$）は符号関数，$\mathrm{sat} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は単位飽和関数，$\mathrm{dio} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は，いわば理想ダイオード関数である．これの関数の概要を図 1 に示す．

これらの関数は下記の性質を持つ．

$$y \in Z\mathrm{sgn}(x - y) \iff y = \mathrm{sat}(Z, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^r,\ \forall Z \in \mathbb{R}_+ \tag{4}$$

$$y \in \mathrm{dio}(x + y) \iff y = \max(0, -x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+ \tag{5}$$

これらの証明は既報 [2] を参照されたい．

## 3.　提案手法

### 3·1　クーロン摩擦

まず，クーロン摩擦力 $f \in \mathbb{R}^r$ と外力 $f_e \in \mathbb{R}^r$ を受ける質量 $M > 0$ の質点を考える．この系の状態空間表現は下記のように表される．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} (f_e - F\mathrm{sgn}(\dot{p}))/M \\ \dot{p} \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで，$p \in \mathbb{R}^r$ はこの質点の位置であり，$F > 0$ は動摩擦力の大きさである．摩擦力 $f$ は

$$f \in F\mathrm{sgn}(\dot{p}) \tag{7}$$

で与えられる．この状態空間表現 (6) は不連続関数 sgn を含むため，通常の積分方法では時間積分できない．

Kikuuwe ら [1] は，式 (7) を下記の微分代数包含で近似する方法を提案している．

$$0 \in K(a + \beta\dot{a}) - F\mathrm{sgn}(\dot{p} - \dot{a}) \tag{8a}$$

$$f \in F\mathrm{sgn}(\dot{p} - \dot{a}) \tag{8b}$$

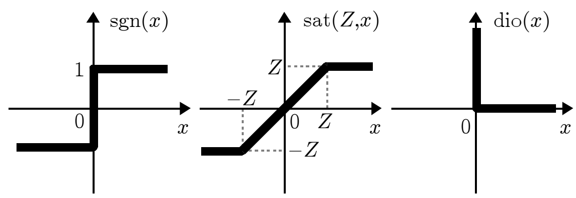


図 1　関数 sgn，sat，および dio

ここで，$a \in \mathbb{R}^r$ は新しく導入された状態変数であり，$K$ および $\beta$ は適切な正の定数，特に $K$ は十分に大きい定数である．Kikuuwe らは式 (8a) を後退オイラー法で離散化し，それを式 (4) を用いて解析的に解くことで，時間積分のアルゴリズムを導出している．

式 (8) の物理的解釈は図 2 のように与えられる．ここでは，位置が $p-a$ である質量の無い仮想物体（プロクシ）が考えられており，それが，位置 $p$ の質点と剛性係数 $K$，粘性係数 $K\beta$ の仮想粘弾性要素で接続されている．摩擦力は $F\mathrm{sgn}(\dot{p}-\dot{a})$ で表され，プロクシに加わっている．仮想粘弾性要素の発生力は $K(a+\beta\dot{a})$ で表され，それは摩擦力とつりあっている．式 (8) は，式 (7) における $f$ と $\dot{p}$ の間の拘束を，ある動特性を持つ補助的な変数 $a$ によって緩和したものと見なすことができる．その意味で，式 (7) を式 (8) で近似するという手法は，数値的な安定性を改善するための Baumgarte[3] の手法に似ているということもできる．

提案手法は，後退オイラー法を用いずに式 (8) を解くことで得られる．式 (8) に直接式 (4) を適用すると，下記の常微分方程式に書き直すことが出来る．

$$\dot{a} = (\mathrm{sat}(F/K, a+\beta\dot{p}) - a)/\beta \tag{9a}$$

$$f = K\mathrm{sat}(F/K, a+\beta\dot{p}) \tag{9b}$$

式 (6) の sgn の部分を上式で置換すると，下記のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_e - K\mathrm{sat}(F/K, a+\beta\dot{p}))/M \\ \dot{p} \\ (\mathrm{sat}(F/K, a+\beta\dot{p}) - a)/\beta \end{bmatrix} \tag{10}$$

図 3 は常微分方程式 (10) を 4 次の Runge-Kutta 法で時間積分した結果を示す．本手法の利点を示すために，LuGre モデル [4] を用いた場合の結果もともに示す．図 3(a) に示すように，外力 $f_e$ は最大静止摩擦力（$F = 0.5$ N）を一時的に上回ったあと，それより少し下で振動的に変化するように与えられている．その結果，従来から指摘されているように [1, 5]，LuGre モデル [4] が静止摩擦力以下でも有界でない変位を生じていることが図 3(b) より読み取れる．一方で提案モデル (10) ではそのような現象は生じず，静止摩擦状態が適切に再現されている．これは，LuGre モデルと比較して，式 (9) が式 (7) のより良い近似であることを意味している．Kikuuwe らの方法 [1] でも同様の結果が得られるが，積分法が後退オイラー法に限定されているため，提案手法のほうが優れているということができる．

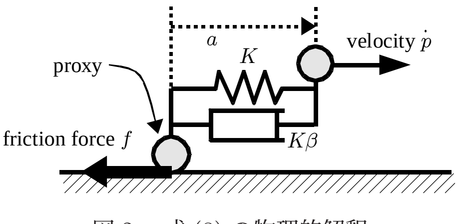


図 2　式 (8) の物理的解釈

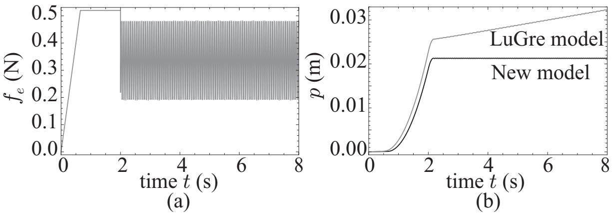


図 3　式 (10) を用いたシミュレーション：(a) 与えられた外力 $f_e$．(b) その結果得られた剛体の位置 $p$．

### 3·2　剛体接触

一次元空間を運動する質量 $M > 0$ の質点と，$p \le 0$ に存在する剛体壁から構成される機械システムを考える．この系の状態方程式は下記のように表される．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} (f_e + \mathrm{dio}(p))/M \\ \dot{p} \end{bmatrix} \tag{11}$$

ここで，$p \in \mathbb{R}$ は質点の位置，$f_e \in \mathbb{R}$ は質点が受ける外力である．質点が壁から受ける接触力 $f \in \mathbb{R}$ は下記のように表される．

$$f \in \mathrm{dio}(p) \tag{12}$$

この状態空間表現 (11) も dio という不連続関数を含んでいるため，通常の積分法では時間積分できない．

菊植と藤本 [2] は式 (12) を下記の微分代数包含式に近似することによって，接触力 $f$ を算出する方法を示している．

$$0 \in K(e+\beta\dot{e}) - \mathrm{dio}(p+e) \tag{13a}$$

$$f \in \mathrm{dio}(p+e) \tag{13b}$$

ここで，$K$ および $\beta$ は適切な正の定数であり，$e \in \mathbb{R}$ は新しく導入された状態変数である．この式も，図 4 のように，プロクシと粘弾性要素を用いて物理的に解釈できる，接触によって，接触力 $\mathrm{dio}(p+e)$ がプロクシへ加わり，その力は粘弾性要素の力 $K(e+\beta\dot{e})$ と釣り合う．式 (13) は dio 関数の引数に $\dot{e}$ を含んでいないため，式 (5) をそのまま適用することはできない．菊植と藤本は，式 (13) を後退オイラー法で離散化した後に式 (5) を適用し，シミュレーションのためのアルゴリズムを導出しているが，この方法では他の積分法を適用することができない．

本稿での提案手法は，後退オイラー法を用いずに，式 (12) を下記の微分代数包含式に近似してから式 (5) を適用するというものである．

$$0 \in K(e+\beta\dot{e}) - \mathrm{dio}(p+e+\alpha\dot{e}) \tag{14a}$$

$$f \in \mathrm{dio}(p+e+\alpha\dot{e}) \tag{14b}$$

付加した項 $\alpha\dot{e}$ によって，式 (5) の適用が可能になり，式 (14) は下記の常微分方程式に変換できる．

$$\dot{e} = \max(-e/\beta, -(p+e)/\alpha) \tag{15a}$$

$$f = K\max(0, e - \beta(p+e)/\alpha) \tag{15b}$$

式 (14) の一つの物理的解釈は，変数 $\tilde{e} \triangleq e + \alpha\dot{e}$ を用いて説明できる．$\tilde{e}$ は図 4 中の粘弾性要素の変位に相当し，その粘弾性要素の発生力に伝達関数 $1/(1+\alpha s)$ のローパスフィルタを通したものが接触力 $f$ である．な

お，式 (14) に $\alpha=\beta$ を代入すると，式 (13) に $\beta=0$ を代入したものと等価になる．すなわち，粘性効果を得るためには，$\alpha$ は $\beta$ より小さく設定する必要がある．

式 (15) において，力 $f$ は $p$, $\dot{p}$ および $e$ に対して常に連続で，かつ，常に正である（すなわち，吸着力を発生しない）ことが分かる．線形な粘弾性力（Kelvin-Voigt モデル）によるペナルティ法や Hunt-Crossley モデル [6] などの従来の方法は，位置または速度に対して不連続であるか吸着力が発生しうるかのいずれかの欠点を持つ．本手法はこれらの欠点を持たない．

微分代数包含式 (11) の dio の部分を式 (15a) で置換することにより，下記の常微分方程式近似が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\dot{p}\\ p\\ e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f_e+K\max(0,e-\beta(p+e)/\alpha))/M\\ \dot{p}\\ \max(-e/\beta,-(p+e)/\alpha)\end{bmatrix} \tag{16}$$

常微分方程式 (16) において異なる $\alpha$ の値を用いてシミュレーションを行った結果を図 5 に示す．$\alpha$ の値が小さくなるにつれて，反発係数が小さくなるのが分かる．これは，小さい $\alpha$ が高周波領域での粘性力を大きくするという解釈に一致する．

### 3·3 一般的な手法

上記の二つの組み合わせにより，一般的な機械システムを常微分方程式で表現できる．まず，機械システムの状態空間表現を下記のような微分包含式で表す．

$$\dot{x}\in\Phi(x) \tag{17}$$

ここで，$x\in\mathbb{R}^n$ は状態ベクトルであり，$\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は dio と sgn を複数箇所に含んだ関数である．いま，$\Phi$ の中では, 異なる $m$ 個の引数 $\psi_i$ が dio に，異なる $n$ 個の引数 $\theta_i$ が sgn に使われているとする．

このとき，式 (17) は下記の手順で常微分方程式に近似できる．

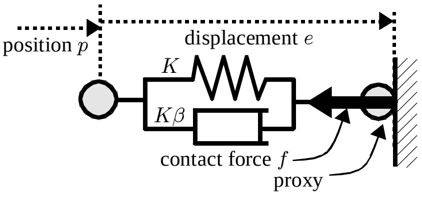


図 4　式 (13) の物理的解釈

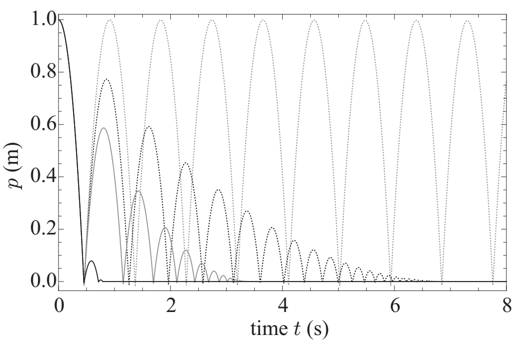


図 5　式 (16) を用いたシミュレーションの結果（灰色破線：$\alpha=\beta$，黒破線：$\alpha=0.7\beta$，灰色実線：$\alpha=0.5\beta$，黒実線：$\alpha=0.1\beta$）．

**ステップ 1：** まず，$\mathrm{dio}(\psi_i)$ を $K_{\mathrm{d}i}\max(0,e_i-\beta_{\mathrm{d}i}(\psi_i+e_i)/\alpha_i)$ に置き換え，$\dot{e}_i=\max(-e_i/\beta_{\mathrm{d}i},-(\psi_i+e_i)/\alpha_i)$ という行を状態空間表現に追加する．

**ステップ 2：** その後，$\chi_i\mathrm{sgn}(\theta_i)$ を $K_{\mathrm{s}i}\mathrm{sat}(\chi_i/K_{\mathrm{s}i},a_i+\beta_{\mathrm{s}i}\theta_i)$ に置き換え，$\dot{a}_i=(\mathrm{sat}(\chi_i/K_{\mathrm{s}i},a_i+\beta_{\mathrm{s}i}\theta_j)-a_i)/\beta_{\mathrm{s}i}$ という行を状態空間表現に追加する．

ここで，$K_{\mathrm{d}i}$，$\beta_{\mathrm{d}i}$，$\alpha_i$，$K_{\mathrm{s}i}$，および $\beta_{\mathrm{s}i}$ は適切な正の定数である．また，$\chi_i$ は定数または状態変数の関数であり，ステップ 1 の置換の結果得られた $K_{\mathrm{d}i}\max(0,\cdots)$ を含む場合もある．この結果得られる常微分方程式は下記のような形になる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x\\ e_1\\ \vdots\\ e_m\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\Phi}(x,e_1,\cdots,e_m,a_1,\cdots,a_n)\\ \max(-e_1/\beta_{\mathrm{d}1},-(\psi_1+e_1)/\alpha_1)\\ \vdots\\ \max(-e_m/\beta_{\mathrm{d}m},-(\psi_m+e_m)/\alpha_m)\\ (\mathrm{sat}(\chi_1/K_{\mathrm{s}1},a_1+\beta_{\mathrm{s}1}\theta_1)-a_1)/\beta_{\mathrm{s}1}\\ \vdots\\ (\mathrm{sat}(\chi_n/K_{\mathrm{s}n},a_n+\beta_{\mathrm{s}n}\theta_n)-a_n)/\beta_{\mathrm{s}n}\end{bmatrix} \tag{18}$$

ここで，$\hat{\Phi}(x,e_1,\cdots,e_m,a_1,\cdots,a_n)$ は関数 $\Phi(x)$ に上記の置換を施して得られる関数である．

なお，関数 $\Phi(x)$ 内に，dio 以外の不連続関数と sgn の積が含まれている場合や，$\chi_i$ が非負であることが保証されない場合には，本手法は適用できない．しかしながら，関数 $\Phi(x)$ がそのような構造になるような機械システムは，今のところ見出せていない．摩擦力と接触力が相互に干渉する複雑な機械システムの例を第 4·2 節で示すが，そのような機械システムに対しても本手法は適用できる．

## 4. 例題

### 4·1 例題 1：摩擦を含む剛体接触

3 次元空間上で運動する質量 $M$ の質点と，$xy$ 平面と一致する摩擦がある剛体平面から成る機械システムを考える．この系の状態空間表現は下記のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}p\\ \hline \dot{p}\end{bmatrix}\in\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \hline \dfrac{1}{M}\begin{bmatrix}\mu\mathrm{dio}(p_z)\mathrm{sgn}(\dot{p}_{xy})\\ \mathrm{dio}(p_z)\end{bmatrix}\end{bmatrix} \tag{19}$$

ここで，$p=[p_{xy}^T,\,p_z]^T$, $p_{xy}\in\mathbb{R}^2$ であり，$\mu$ は摩擦係数とする．

第 3·3 節の手順を用いると，微分包含式 (19) の常微分方程式近似は下記のように得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}p\\ \hline \dot{p}\\ \hline e\\ a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \hline \dfrac{1}{M}\begin{bmatrix}f_{xy}\\ f_z\end{bmatrix}\\ \hline \max(-e/\beta_1,-(p_z+e)/\alpha)\\ (f_{xy}/K_2-a)/\beta_2\end{bmatrix} \tag{20}$$

ただし，

$$f_{xy}\triangleq K_2\mathrm{sat}(\mu f_z/K_2,\beta_2\dot{p}_{xy}+a) \tag{21}$$

$$f_z \triangleq K_1 \max(0, e - \beta_1(p_z + e)/\alpha) \quad (22)$$

であり，$\alpha$，$\beta_*$，および $K_*$ は適切な正の定数である．

### 4·2 例題 2：複数の摩擦接触を含む系

もうひとつの例として，図 6 のような機械システムを考える．この系には複数の摩擦接触が含まれており，摩擦力と接触力が相互に影響する構造になっている．図 6 中に示すように変数を定義すると，この系の状態空間表現は下記のようになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} p \\ \hdashline \\ \dot{p} \\ \\ \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \hdashline (\mathrm{dio}(p_{1x}) - \mathrm{dio}(p_{2x} - p_{1x}))/M_1 \\ (-\Omega_1 - \Omega_2 - K_s p_{1y})/M_1 \\ (-\Omega_3 + \mathrm{dio}(p_{2x} - p_{1x}))/M_2 \\ (\Omega_2 + \mathrm{dio}(p_{2y}))/M_2 - g \end{bmatrix} \quad (23)$$

ただしここで，

$$\Omega_1 \triangleq \mu_1 \mathrm{dio}(p_{1x})\mathrm{sgn}(\dot{p}_{1y}) \quad (24)$$

$$\Omega_2 \triangleq \mu_2 \mathrm{dio}(p_{2x} - p_{1x})\mathrm{sgn}(\dot{p}_{1y} - \dot{p}_{2y}) \quad (25)$$

$$\Omega_3 \triangleq \mu_3 \mathrm{dio}(p_{2y})\mathrm{sgn}(\dot{p}_{2x} + u) \quad (26)$$

であり，$p \triangleq [p_{1x}, p_{1y}, p_{2x}, p_{2y}]^T$ である．また，$\mu_1$ は壁と $M_1$ の間の，$\mu_2$ は $M_1$ と $M_2$ の間の，$\mu_3$ は $M_2$ とコンベヤの間の摩擦係数をあらわす．

第 3·3 節で示した手順により，微分包含式 (23) は下記のように常微分方程式に変換できる．まず，$\mathrm{dio}(p_{1x})$，$\mathrm{dio}(p_{2x} - p_{1x})$，および $\mathrm{dio}(p_{2y})$ をそれぞれ

$$\psi_1 \triangleq K_1 \max(0, e_1 - \beta_1(p_{1x} + e_1)/\alpha_1) \quad (27)$$

$$\psi_2 \triangleq K_2 \max(0, e_2 - \beta_2(p_{2x} - p_{1x} + e_2)/\alpha_2) \quad (28)$$

$$\psi_3 \triangleq K_3 \max(0, e_3 - \beta_3(p_{2y} + e_3)/\alpha_3) \quad (29)$$

で置換する．ここで，$K_*$，$\beta_*$ および $\alpha_*$ は適切な正の定数である．これにより，$\Omega_1$，$\Omega_2$，および $\Omega_3$ は，それぞれ $\mu_1\psi_1\mathrm{sgn}(\dot{p}_{1y})$，$\mu_2\psi_2\mathrm{sgn}(\dot{p}_{1y} - \dot{p}_{2y})$，および $\mu_3\psi_3\mathrm{sgn}(\dot{p}_{2x} + u)$ で置き換えられることになる．次に，これらをそれぞれ

$$\theta_1 \triangleq K_4 \mathrm{sat}(\mu_1\psi_1/K_4, a_1 + \beta_4\dot{p}_{1y}) \quad (30)$$

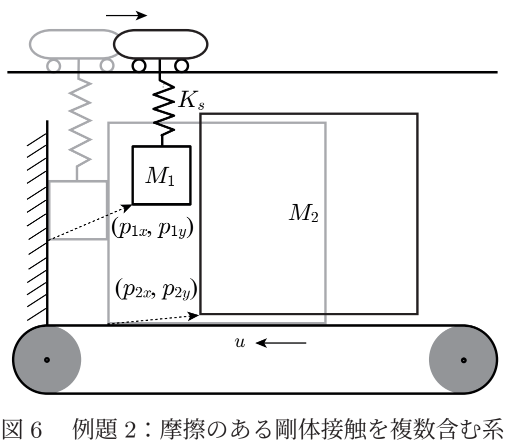


図 6 例題 2：摩擦のある剛体接触を複数含む系

$$\theta_2 \triangleq K_5 \mathrm{sat}(\mu_2\psi_2/K_5, a_2 + \beta_5(\dot{p}_{1y} - \dot{p}_{2y})) \quad (31)$$

$$\theta_3 \triangleq K_6 \mathrm{sat}(\mu_3\psi_3/K_6, a_3 + \beta_6(\dot{p}_{2x} + u)) \quad (32)$$

で置き換える．ここで，$K_*$ および $\beta_*$ は適切な正の定数である．そして，新たな状態変数 $e_*$ および $a_*$ の動特性を式 (23) に追加する．これにより，式 (23) は下記の常微分方程式で近似できることになる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} p \\ \hdashline \\ \dot{p} \\ \\ \\ \hdashline e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \hdashline (\psi_1 - \psi_2)/M_1 \\ (-K_s p_{1y} - \theta_1 - \theta_2)/M_1 \\ (-\theta_3 + \psi_2)/M_2 \\ (\theta_2 + \psi_3)/M_2 - g \\ \hdashline \max(-e_1/\beta_1, -(p_{1x} + e_1)/\alpha_1) \\ \max(-e_2/\beta_2, -(p_{2x} - p_{1x} + e_2)/\alpha_2) \\ \max(-e_3/\beta_3, -(p_{2y} + e_3)/\alpha_3) \\ (\theta_1/K_4 - a_1)/\beta_4 \\ (\theta_2/K_5 - a_2)/\beta_5 \\ (\theta_3/K_6 - a_3)/\beta_6 \end{bmatrix} \quad (33)$$

## 5. おわりに

本稿では，クーロン摩擦と剛体接触を含む滑らかでない機械システムを，常微分方程式で近似的に表す方法を示した．得られる常微分方程式は，静止摩擦状態で変位が無限に増大しない性質など，滑らかでない機械システムが本来持つ重要な特性を保持している．

現在のところ，パラメータ $K$，$\alpha$，$\beta$ の調整は試行錯誤的に行う必要がある．特に，接触に関わるパラメータ $\alpha$ および $\beta$ は反発係数に大きく影響するが，これらのパラメータの影響とパラメータ調整のための指針を明らかにすることは今後の重要な課題である．


### 謝辞

本研究は科学研究費補助金（課題番号 24360098）の助成を受けて行われました．ここに記して感謝します．


### 参考文献


[1] R. Kikuuwe, et al.: Admittance and impedance representations of friction based on implicit Euler integration. *IEEE Trans. Robotics*, 22(6), pp.1176–1188, 2006.

[2] 菊植, 藤本：幾何学的力覚提示アルゴリズムの力学的解釈とインピーダンス型およびアドミッタンス型の実装法. 日本ロボット学会誌, 25(2), pp.142–151, 2007.

[3] J. Baumgarte: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1), pp.1–16, 1972.

[4] C. Canudas de Wit, et al.: A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(3), pp.419–425, 1995.

[5] P. Dupont, et al.: Single state elastoplastic friction models. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47(5), pp.787–792, 2002.

[6] K. H. Hunt and F. R. E. Crossley: Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Trans. ASME: J. Applied Mechanics*, 42(2), pp.440–445, 1975.