Lagrange Multipliers and Baumgarte-like Relaxation for Frictional Unilateral Constraints
摩擦のある片側拘束を表現するためのラグランジュ未定乗数とバウムガルテ緩和

菊植 亮
九州大学

Bernard Brogliato
INRIA, France

(partially supported by NEDO)

はじめに：拘束条件付きの運動方程式

◆ 運動方程式

$$M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T \underbrace{\lambda}_{\text{力}}$$

◆ 等式拘束

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix}}_{\text{位置・速度}} = 0$$

- ここで $J(q) \triangleq \begin{bmatrix} J_v(q) \\ \partial \Psi_p(q)/\partial q \end{bmatrix}$
- 速度拘束（車両などのノンホロ拘束）
- 位置拘束（ホロノミック拘束）

$$\xrightarrow{\text{下半分を微分}} \underbrace{J(q)\dot{q}}_{\text{速度}} = 0 \xrightarrow{\text{微分}} \underbrace{J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}}_{\text{加速度}} = 0$$

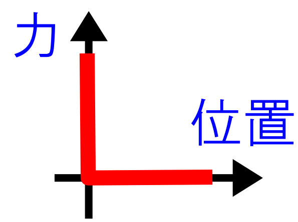
◆ 加速度 $\ddot{q}$ を消去して $\lambda = \cdots$ を得て，それを運動方程式に代入すると計算できる！ 簡単！

片側拘束のときは？摩擦があったら？

$$M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T \underbrace{\lambda}_{\text{力}}$$

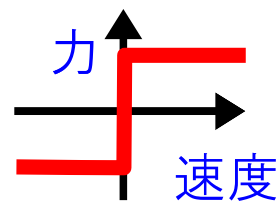
- 片側拘束

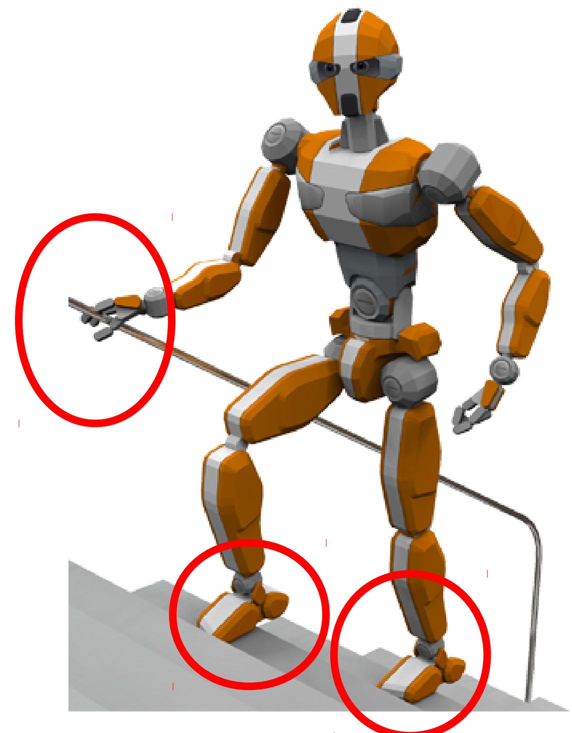
$$0 \leq \underbrace{\Psi_p(q)}_{\text{位置}} \perp \underbrace{\lambda_n}_{\text{力}} \geq 0$$



- 摩擦

$$\underbrace{\lambda_t}_{\text{力}} \in -\mu \underbrace{\lambda_n}_{\text{力}} \mathrm{sgn}(\underbrace{J_v(q)\dot{q}}_{\text{速度}})$$





JVRC (主催：NEDO) のサイトより

- 等式拘束の場合と見た目が違いすぎる
- 美しくない！扱いづらい！
- 離散化しないと計算できない

本発表のポイント

- 摩擦あり片側拘束の新しい表現

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda \\ \begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda) \end{cases}$$

  - 等式拘束の場合の自然な一般化

- それを計算／解析するための近似（緩和）方法

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda \\ J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} + \frac{2\zeta}{\delta} J(q)\dot{q} + \frac{1}{\delta^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda) \end{cases}$$

  - （奇しくも？）Baumgarte 安定化法（1920）の一般化

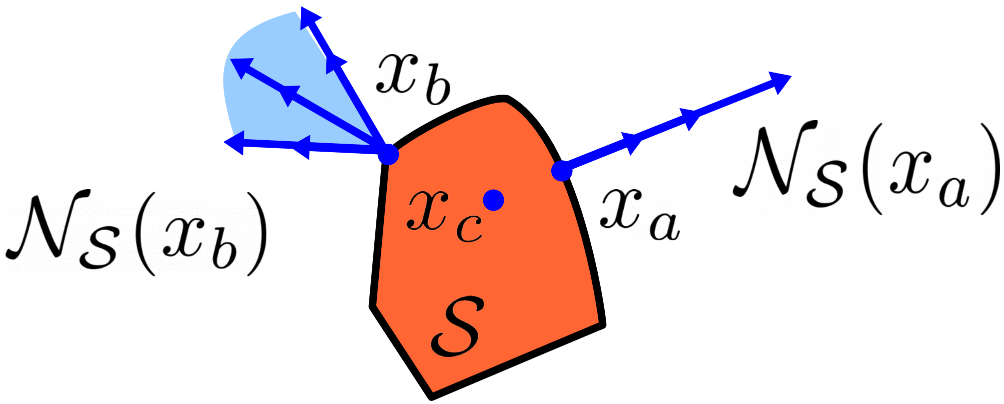
- 摩擦接触特有の代数問題について
  - 線形相補性問題（LCP）でも二次錐相補性問題でもない

$$\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon\to+0} A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

便利なツール：法錐（Normal Cone）

◆ 点 x における集合 $\mathcal{S}$ のメトリック U での法錐

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}^{U}(x) \triangleq \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^T U(x^* - x) \leq 0 \ \forall x^* \in \mathcal{S}\} & \text{if } x \in \mathcal{S} \\ \emptyset & \text{if } x \notin \mathcal{S} \end{cases}$$



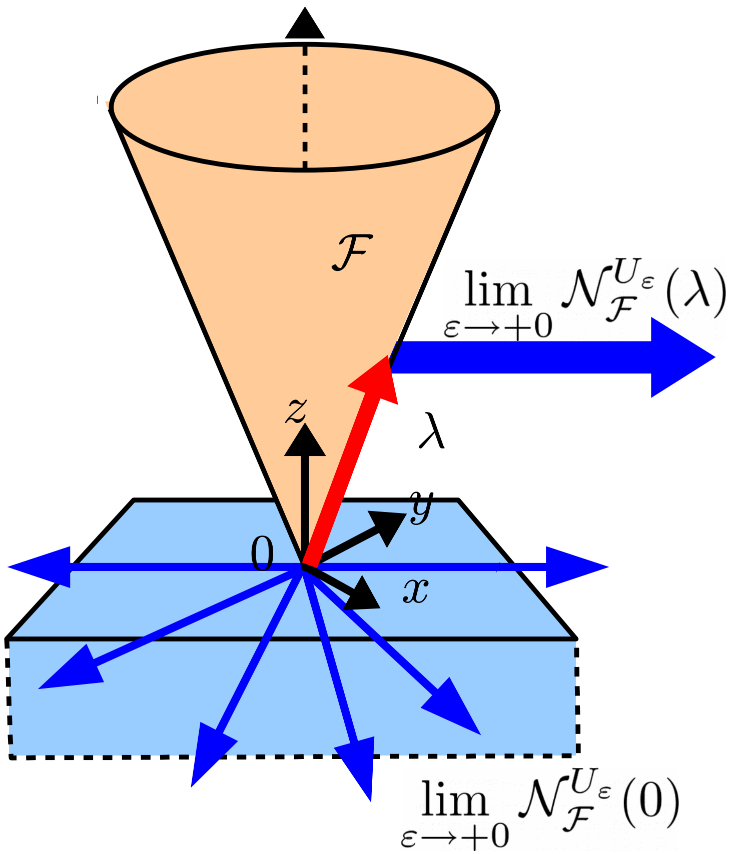
◆ x が集合 $\mathcal{S}$ の表面 ⇒ 法錐は法線ベクトルの集合

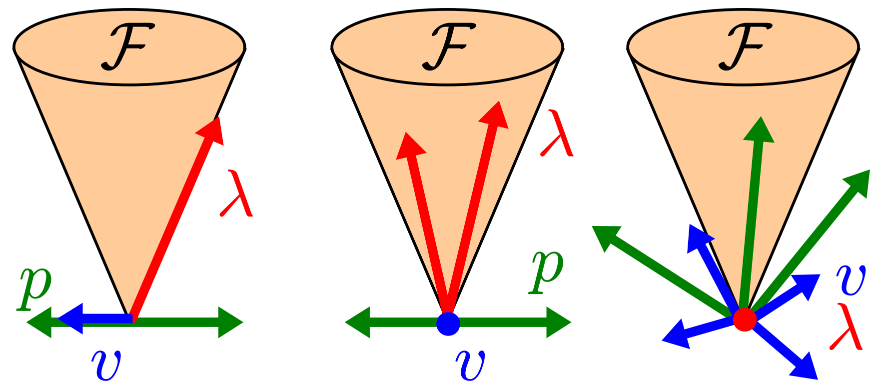
◆ x が集合 $\mathcal{S}$ の内部 ⇒ 法錐はゼロベクトル

◆ x が集合 $\mathcal{S}$ の外部 ⇒ 法錐は空集合

摩擦あり片側接触

◆摩擦円錐の法錐：位置・速度と関連付けられる





動摩擦　静止摩擦　非接触

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ p_z \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon \to +0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

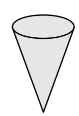
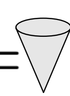
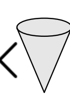
ただし $U_\varepsilon = \mathrm{diag}[1, 1, 1/\varepsilon]$

NEW!!!

例

$$M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda$$

$$\begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

- 等式拘束 $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ $U_\varepsilon = I_n$
- 片側拘束 $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n_+$ $U_\varepsilon = I_n$
- クーロン摩擦 $\mathcal{F} = [-F, F]$ $U_\varepsilon = 1$
- 摩擦接触 $\mathcal{F} =$  $U_\varepsilon = \mathrm{diag}[1, 1, \frac{1}{\varepsilon}]$
- 複数の摩擦接触 $\mathcal{F} =$  $\times$  $\times \cdots$ $U_\varepsilon = \mathrm{diag}[1, 1, \frac{1}{\varepsilon}, 1, 1, \frac{1}{\varepsilon}, \cdots]$

どうやって計算する？

- 等式拘束 ⇒ 微分して連立して $\ddot{q}$ を消去．

$$M(q)\ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}, t) = J(q)^T \lambda$$

$$\begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} = 0$$

- 不等式拘束から加速度を得るには？

$$x \geq 0$$

ほぼ等価

$$\lim_{\delta \to +0} \left(\ddot{x} + \frac{2\zeta \dot{x}}{\delta} + \frac{x}{\delta^2} \right) \geq 0$$

緩和

$$\ddot{x} + \frac{2\zeta \dot{x}}{\delta} + \frac{x}{\delta^2} \geq 0$$

δ: 微小
ζ: 任意

NEW!!!

提案手法：Baumgarte-like 緩和

$$M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda$$

$$\begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon \to +0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

緩和

$$J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} + \frac{2\zeta}{\delta}J(q)\dot{q} + \frac{1}{\delta^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon \to +0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

$\ddot{q}$ を消去すると・・・・

$$\boxed{\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon \to +0} A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)}$$

ただし $A(q) \triangleq J(q)M(q)^{-1}J(q)^T$

$$b(\delta,q,\dot{q}) \triangleq J(q)M(q)^{-1}\Phi(q,\dot{q},t) - H(q,\dot{q})\dot{q} - \frac{2\zeta}{\delta}J(q)\dot{q} - \frac{1}{\delta^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix}$$

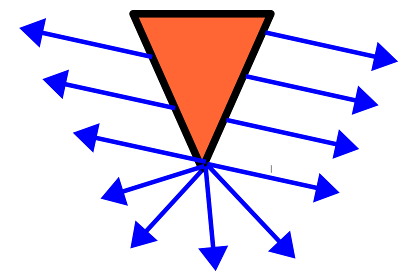
上記の代数問題が λ に関して唯一解を持てば，
それを運動方程式に代入して計算できる！！

摩擦あり片側接触に特有の代数問題

$A,\ b,\ U_\varepsilon,\ \mathcal{F}$ が与えられたとき,

$$\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon \to +0} A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

を満たすλ を求めよ.



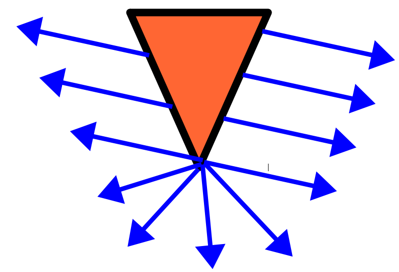
- 従来研究では，後退オイラー法での離散化によって，等価な式に到達．解き方も提案されている．
- しかし，表現はまったく異なる．
  - Acary et al., 2011 ZAMM: $\begin{cases} Mv + f = H^\top r \\ \tilde{u} = Hv + w + Es \\ L^* \ni \tilde{u} \perp r \in L, \end{cases}$
  - Bertails-Descoubes et al., 2011 TOG: $\boldsymbol{f}^{\mathrm{AC}}(\underline{\mathbf{W}}\underline{\lambda} + \underline{\mathbf{b}}, \underline{\lambda}) = \mathbf{0}.$
  - Bonnefon & Daviet, 2011 INRIA-TR: $U = MR + q,\quad (U, R) \in C(\mu, e)$
- 上記の表現（と幾何学的解釈）は新規

過去の研究をこの表現であらわすと‥

- 厳密解（Moreau 1999 など）

$$\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon \to +0} A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

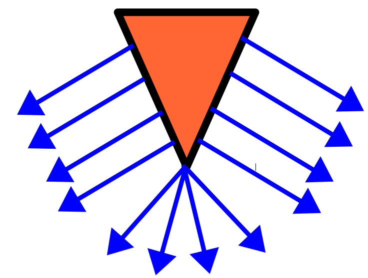
  - SICONOS（INRIA）で採用



- Anitescu & Tasora (2010)

$$\lambda - A^{-1}b \in -A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}(\lambda)}$$

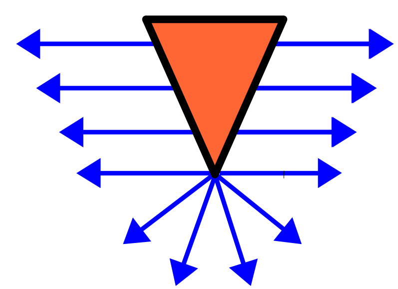
  - Chrono (Negrut et al.)で採用
  - 二次錐相補性問題（SOCCP）の標準形だから速い. しかし不正確



- Nakaoka et al. (2007)

$$\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon \to +0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

  - Choreonoid (AIST)で採用
  - 単純な射影だから速い. しかし不正確



まとめ

- 非平滑力学系の新しい表現

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda \\ \begin{bmatrix} J_v(q)\dot{q} \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda) \end{cases}$$

- それの Baumgarte-like 緩和
  - 離散化せずに，連続時間領域での解析が可能に

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + \Phi(q,\dot{q},t) = J(q)^T\lambda \\ J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} + \dfrac{2\zeta}{\delta}J(q)\dot{q} + \dfrac{1}{\delta^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_p(q) \end{bmatrix} \in -\lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda) \end{cases}$$

- 摩擦接触特有の代数問題の新しい表現

$$\lambda - A^{-1}b \in -\lim_{\varepsilon\to+0} A^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{F}}^{U_\varepsilon}(\lambda)$$

- Choreonoid (AIST) の摩擦演算を厳密解で置換するプラグイン「SiconosPlugin」（INRIAの「SICONOS」を利用）をGithubで公開中