

12. Coulomb相互作用による 2 電荷の運動

Coulomb 相互作用による2電荷の運動

ある間隔に置かれて静止した2個の荷電粒子(q_1, q_2)が Coulomb 相互作用によって運動を始めるとき、それぞれの粒子は時間とともにどのような軌跡をたどるであろうか。具体的には、異なる極の磁石がくっついたり、同じ極の磁石が離れるような見慣れた運動であるが¹、2つの物体間にはたらく力が距離の2乗に反比例するために距離と時間の関数関係は意外に複雑なものになる。本 monograph では、運動方程式を厳密に解き、軌跡の関数を導出する。2つの荷電粒子(電荷： q_1 および q_2)それぞれに対する運動方程式は次式で与えられる。

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2)$$

式(1)/ m_1 と式(2)/ m_2 の差をとると、

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{m_1} - \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{m_2} \right) \quad (3-1)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3-2)$$

となる。ここで、 $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ は2粒子の換算質量 μ であるから、

$$\mu \frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (4)$$

と書くことができ、相対位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を定義すると、2粒子の相対運動を記述する運動方程式として、

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5)$$

が得られる。 \mathbf{r} の大きさ r に関する方程式は

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \equiv \frac{C}{r^2} \quad (6)$$

であり、電荷が同符号の場合は斥力がはたらくから $C > 0$ となり、異符号の場合は引力がは

¹ 電気には電荷は存在するが、磁気には“磁荷”というものはないので厳密には少し異なるものの、イメージする運動としては適当なものである。

たらくから $C < 0$ となる。2粒子の相対速度 $v = dr/dt$ を用いると、式(6)の左辺を

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \mu \frac{dv}{dt} = \mu \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \mu v \frac{dv}{dr} \quad (7)$$

と変形できるから、次式が成立する。

$$\mu v \frac{dv}{dr} = \frac{C}{r^2} \quad (8)$$

これをさらに変形して、

$$v dv = \frac{C}{\mu} \frac{1}{r^2} dr \quad (9)$$

を得る。

まず、斥力の場合($C > 0$)を考えよう。初期条件 $r = r_0 (v = 0)$ から任意の距離 $r (> r_0)$ まで2粒子が遠ざかることを考える。距離 r での速度を v として式(9)を積分すると、

$$\text{(左辺)} \rightarrow \int_0^v v dv = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (10)$$

$$\text{(右辺)} \rightarrow \frac{C}{\mu} \int_{r_0}^r r^{-2} dr = \frac{C}{\mu} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (11)$$

より次式が得られる。

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2C}{\mu} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} \quad (12)$$

斥力の場合、2粒子は時間とともに遠ざかり ($dr/dt > 0$ であるから正号を採用)、距離 r での相対速度 v として、

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2C(r-r_0)}{\mu r_0 r}}} \quad (\text{斥力: } r_0 < r) \quad (13)$$

が得られる¹。距離と時間の関係を得るために、式(12)を時刻 $t = 0$ から任意の時刻 t まで積分すると、

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1/r_0 - 1/r}} = \sqrt{\frac{2C}{\mu}} \int_0^t dt = \sqrt{\frac{2C}{\mu}} t \quad (14)$$

となる。 $r = 1/u$ と置換すると、 $dr = -(1/u^2)du$ であるから、式(14)について

¹ 別の導出法は付録参照。

$$(左辺) \rightarrow -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{u^2 \sqrt{1/r_0 - u}} = \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{u^2 \sqrt{1/r_0 - u}} = \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{u^2 \sqrt{-u + 1/r_0}} \quad (15)$$

と変形できる。この積分の不定積分は、数学公式により¹

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \quad (16)$$

であり、さらに、式(16)の右辺の積分は

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| & (b > 0) \\ = \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} & (b < 0) \end{cases} \quad (17)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} & (b < 0) \end{cases} \quad (18)$$

であるから、 $x = u$, $a = -1$, $b = 1/r_0 > 0$ の対応より、次の不定積分を得る。

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{-u + 1/r_0}} = -\frac{r_0 \sqrt{-u + 1/r_0}}{u} + \frac{r_0^{3/2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{-u + 1/r_0} - \sqrt{1/r_0}}{\sqrt{-u + 1/r_0} + \sqrt{1/r_0}} \right| \quad (19)$$

これより、定積分[式(15)右辺]の上限($u = 1/r_0$)と下限($u = 1/r$)での値が

$$\cdot \text{上限}(u = 1/r_0) \text{での値} : 0 \quad (20)$$

$$\cdot \text{下限}(u = 1/r) \text{での値} : -\sqrt{rr_0(r-r_0)} + \frac{r_0^{3/2}}{2} \log \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r} + \sqrt{r-r_0}} \right) \quad (21)$$

となり、式(14)より、斥力により離れていく2電荷間の距離と時間の関係として次式を得る。

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2C}} \left[\sqrt{rr_0(r-r_0)} - \frac{r_0^{3/2}}{2} \log \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r} + \sqrt{r-r_0}} \right) \right] \quad (\text{斥力}) \quad (22)$$

式(22)を r で微分すると、

$$\frac{dt}{dr} \equiv v^{-1} = \sqrt{\frac{\mu}{2C}} \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{r_0}(2r-r_0)}{\sqrt{r(r-r_0)}} + \frac{r_0^{3/2}}{2} \frac{1}{\sqrt{r(r-r_0)}} \right] = \sqrt{\frac{\mu r_0 r}{2C(r-r_0)}} \quad (23)$$

となり、時刻 t における相対速度($v = dr/dt$)が確かに式(13)であることが確認できる(当然)。2電荷間の距離が十分大きくなると($r_0 \ll r$)、2つの電荷間の相対速度は[式(13)より]

¹ 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信「数学公式I」岩波書店, 1981年(第17刷), p.97.

$$\boxed{v_{\infty} = \sqrt{\frac{2C}{\mu r_0}}} \quad (24)$$

となり，等速度で遠ざかることになる¹。

一方，引力がはたらく場合($C < 0$)は， $r < r_0$ であり，式(12)は次の形になる。

$$v = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{-\frac{2C}{\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad (25)$$

また， $dr/dt < 0$ であるから負号を採用し，

$$\boxed{v = -\sqrt{-\frac{2C(r_0 - r)}{\mu r_0 r}}} \quad (\text{引力: } r < r_0) \quad (26)$$

となる。また，斥力の場合の式(14)に対応する式は

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1/r - 1/r_0}} = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu}} \int_0^t dt = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu}} t \quad (27)$$

となる。左辺の積分を行うために $r = 1/u$ の置換を行えば，

$$(\text{左辺}) \rightarrow -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{u^2 \sqrt{u - 1/r_0}} = \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{du}{u^2 \sqrt{u - 1/r_0}} \quad (28)$$

となるから，積分公式[式(16)]および $b < 0$ の場合の式(18)に $x = u$ ， $a = 1$ ， $b = -1/r_0 < 0$ を代入して，

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u - 1/r_0}} = \frac{r_0 \sqrt{u - 1/r_0}}{u} + r_0^{3/2} \arctan \sqrt{r_0(u - 1/r_0)} \quad (29)$$

を得る。これより，式(28)の積分の上限と下限に対する値は

$$\cdot \text{上限}(u = 1/r_0) \text{での値: } 0 \quad (30)$$

$$\cdot \text{下限}(u = 1/r) \text{での値: } \sqrt{rr_0(r_0 - r)} + r_0^{3/2} \arctan \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} \quad (31)$$

となる。したがって，式(27)より，引力の場合の時間と距離の関係式として

¹ r が十分大きくなると，電荷間にはたらく Coulomb 力が無視できるから当然の結果である。

$$t = \sqrt{-\frac{\mu}{2C}} \left[\sqrt{r r_0 (r_0 - r)} + r_0^{3/2} \arctan \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}} \right] \quad (\text{引力}) \quad (32)$$

が得られる。確認作業として両辺を r で微分すると、

$$\frac{dt}{dr} \equiv v^{-1} = \sqrt{-\frac{\mu}{2C}} \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{r_0} (r_0 - 2r)}{\sqrt{r(r_0 - r)}} - \frac{r_0^{3/2}}{2} \frac{1}{\sqrt{r(r_0 - r)}} \right] = -\sqrt{-\frac{\mu r_0 r}{2C(r_0 - r)}} \quad (33)$$

となり、確かに、時刻 t における相対速度[式(26)]と一致している。また、引力により2電荷が衝突するまでの時間 t_{coll} は、式(32)に $r = 0$ を代入して、

$$t_{\text{coll}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} \quad (34)$$

となる。

斥力の場合の式(22)と引力の場合の式(32)をもとに、時間とともに2電荷間の距離が変わる様子を図示してみよう。式(22)を少し変形すると、

$$t = \sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2C}} \left[\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \frac{r}{r_0}} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{r/r_0} - \sqrt{r/r_0 - 1}}{\sqrt{r/r_0} + \sqrt{r/r_0 - 1}} \right) \right] \quad (35)$$

となるから、 $x \equiv r/r_0 > 1$ を定義し、一般化(無次元化)した距離と時間で表現すると、

$$t / \sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2C}} = \left[\sqrt{x(x-1)} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \right) \right] \quad (\text{斥力}) \quad (36)$$

が得られる。また、式(32)を同様に変形し、 $x \equiv r/r_0 < 1$ を導入すると

$$t / \sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2C}} = \left[\sqrt{x(1-x)} + \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right] \quad (\text{引力}) \quad (37)$$

が得られ、式(36)と式(37)をプロットすると図1になる。

具体例として、ボーア半径の距離だけ離れて置かれた陽子と電子がどれくらいの時間で衝突するかを計算してみよう。計算に必要な諸量を書き出すと、

- ボーア半径(r_0) = 5.29×10^{-11} m
- 陽子の質量(m_1) = 1.67×10^{-27} kg
- 電子の質量(m_2) = 9.11×10^{-31} kg
- 電気素量 = 1.60×10^{-19} C
- 真空の誘電率 = $1/(\mu_0 c_0^2) = 10^7 / (4\pi c_0^2)$ N⁻¹ C² m⁻²

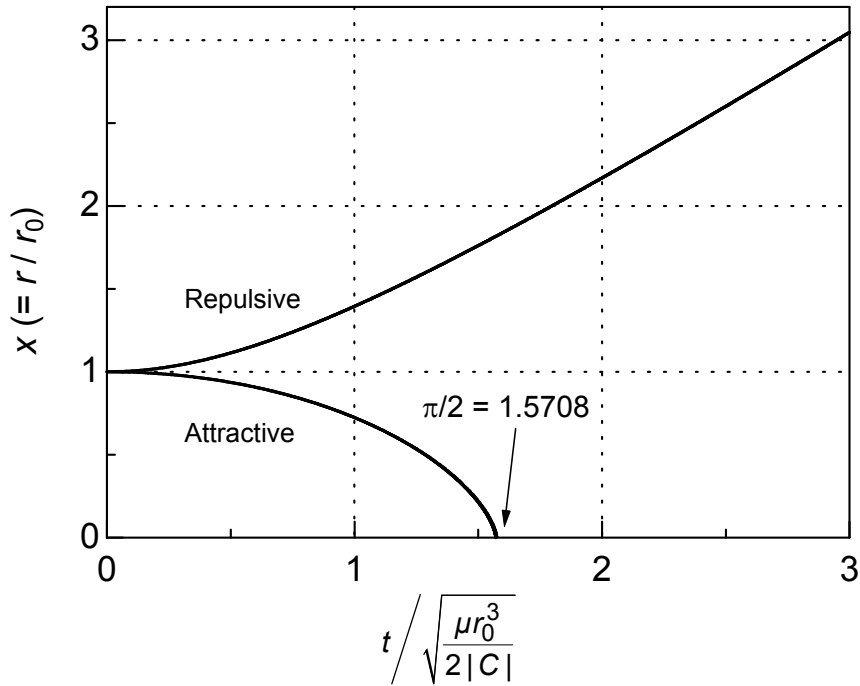


図1. 相互作用する2粒子間の距離と時間の関係

[ただし、 μ_0 は真空の透磁率¹、 $c_0 = 2.99792458 \times 10^8$ (無次元)]
であるから、

$$\mu = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\because m_2 \ll m_1) \quad (38)$$

$$C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{(1.60 \times 10^{-19})^2 c_0^2}{10^7} = -2.30 \times 10^{-28} \text{ Nm}^2 \quad (39)$$

となる。時間のスケール因子は

$$\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = 1.71 \times 10^{-17} \text{ s} \quad (40)$$

であるから、衝突するまでの時間[式(34)]は、

$$t_{\text{coll}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = 2.69 \times 10^{-17} \text{ s} \cong 0.027 \text{ fs} = 27 \text{ as} \quad (41)$$

という値になる。つまり、もし、水素原子の電子が陽子のまわりを回転しなくなると、わずか0.027 fs (= 27 as)²後に原子はつぶれてしまうことになる(正確には中性子とニュートリノ

¹ 2019年5月20日の SI 単位の再定義により、真空の透磁率の値は定義値($4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$)ではなく測定値に変わったが、数値の10桁目までは $4\pi \times 10^{-7}$ と一致するから、通常の計算では $4\pi \times 10^{-7}$ という値で計算してよい。

² fs : フェムト秒, as : アト秒。

になる)。

ここまで、2電荷粒子間を対象に話を進めてきたが、万有引力も距離の2乗に反比例する力であるから、定数 C を万有引力に対応させて書き換えれば、これまでに導出した式をそのまま利用することができる。万有引力の場合は、式(6)が

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \equiv \frac{C}{r^2} \quad (42)$$

の形となり(G は万有引力定数¹)、 $C = -Gm_1 m_2$ であるから、 t_{coll} は

$$t_{\text{coll}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{r_0^3 m_1 m_2}{2C(m_1 + m_2)}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1 + m_2)}} \quad (43)$$

となる。計算に必要な諸量は

- 地球と月の距離(r_0) = 3.84×10^8 m
- 地球の質量(m_1) = 5.97×10^{24} kg
- 月の質量(m_2) = 7.35×10^{22} kg
- 万有引力定数(G) = 6.67×10^{-11} m³ kg⁻¹ s⁻²

であるから、

$$t_{\text{coll}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1 + m_2)}} = 4.16 \times 10^5 \text{ s} = 115 \text{ hr } 38 \text{ min} = 4.8 \text{ 日} \quad (44)$$

となる。もし、月が地球の周りを回るのをやめると、115 hr 38 min(= 4.8日)後²に月と地球は衝突することになる(とはいえ、杞憂である)。

¹ 重力定数ともいう。

² 前版まで誤った値(1.32×10^4 s = 3 hr 40 min)を記しておりました(月が地球に落ちてくることなんかないだろうと思って気が緩み、誤った数値を使って計算していました)。お詫びして訂正します

付録. 式(6)から式(13), (26)を導く別法

式(6)から得られる

$$\ddot{r} = \frac{C}{\mu} \frac{1}{r^2} \quad (45)$$

の両辺に $2\dot{r}$ をかけて¹

$$2\dot{r}\ddot{r} = \frac{2C}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^2} \quad (46)$$

とする。式(46)の左辺は $(\dot{r})^2$ を、右辺は $-(2C/\mu)(1/r)$ を時間で微分したものに等しいから、式(46)の両辺を時間で積分すると、

$$(\dot{r})^2 = -\frac{2C}{\mu} \frac{1}{r} + D \quad (47)$$

となるから (D は積分定数),

$$\dot{r} = \pm \sqrt{-\frac{2C}{\mu} \frac{1}{r} + D} \quad (48)$$

を得る。初期条件として、2粒子間の距離が r_0 、相対速度がゼロであるとすると、積分定数は

$$D = \frac{2C}{\mu} \frac{1}{r_0} \quad (49)$$

となり、次式が成り立つ。

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2C}{\mu} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} \quad (50)$$

斥力の場合、 $\dot{r} = dr/dt > 0$ であるから正号を採用し、 $C > 0$ かつ $r_0 < r$ であるから、式(13)

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2C}{\mu} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)} = \sqrt{\frac{2C(r-r_0)}{\mu r_0 r}} \quad (\text{斥力: } r_0 < r) \quad (51)$$

が得られる。また、引力の場合は、 $\dot{r} = dr/dt < 0$ であるから負号を採用し、 $C < 0$ かつ $r < r_0$ であるから、式(26)

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = -\sqrt{-\frac{2C(r_0-r)}{\mu r_0 r}} \quad (\text{引力: } r < r_0) \quad (52)$$

が得られる。

¹ 変数の上にかかれた点(ドット)は時間微分を意味する ($\dot{r} \equiv dr/dt$ および $\ddot{r} \equiv d^2r/dt^2$)。

Coulomb 相互作用による2電荷の運動

2004年 2月 8日 初版第1刷
2012年 10月 21日 第2版第3刷
2021年 7月 11日 第3版第1刷

著者 山崎 勝義
発行 漁火書店

検印 

印刷 ブルーコピー
製本 ホッチキス
