[2] エネルギー保存則

1次元の運動方程式　$ma - F = 0$

両辺に v をかけてtで積分

$$\int_{t_0}^{t} m\boxed{a}v\,dt - \int_{t_0}^{t} F\boxed{v}dt$$

$a = \dfrac{dv}{dt}$　　$v = \dfrac{dx}{dt}$

$$= \int_{t_0}^{t} m\boxed{\frac{dv}{\cancel{dt}}}v\,\cancel{dt} - \int_{t_0}^{t} F\boxed{\frac{dx}{\cancel{dt}}}\cancel{dt}$$

$$= \int_{v_0}^{v} mv\,dv - \int_{x_0}^{x} F\,dx$$

ここで位置エネルギーUを以下に定義すると

$$U(x) \equiv \boxed{-}\int F\,dx + C$$

マイナスが付くことに注意！

$$= \left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right]$$

$$+\left[U(x) + C - U(x_0) - C\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{一定}$$

運動エネルギー＋位置エネルギー＝一定

（Fが定数の時は、U=－Fx+Cになるが、
それ以外の場合も考慮して
積分をしないでUを定義すること）

これを3次元でx,y,zに対して一般化すると

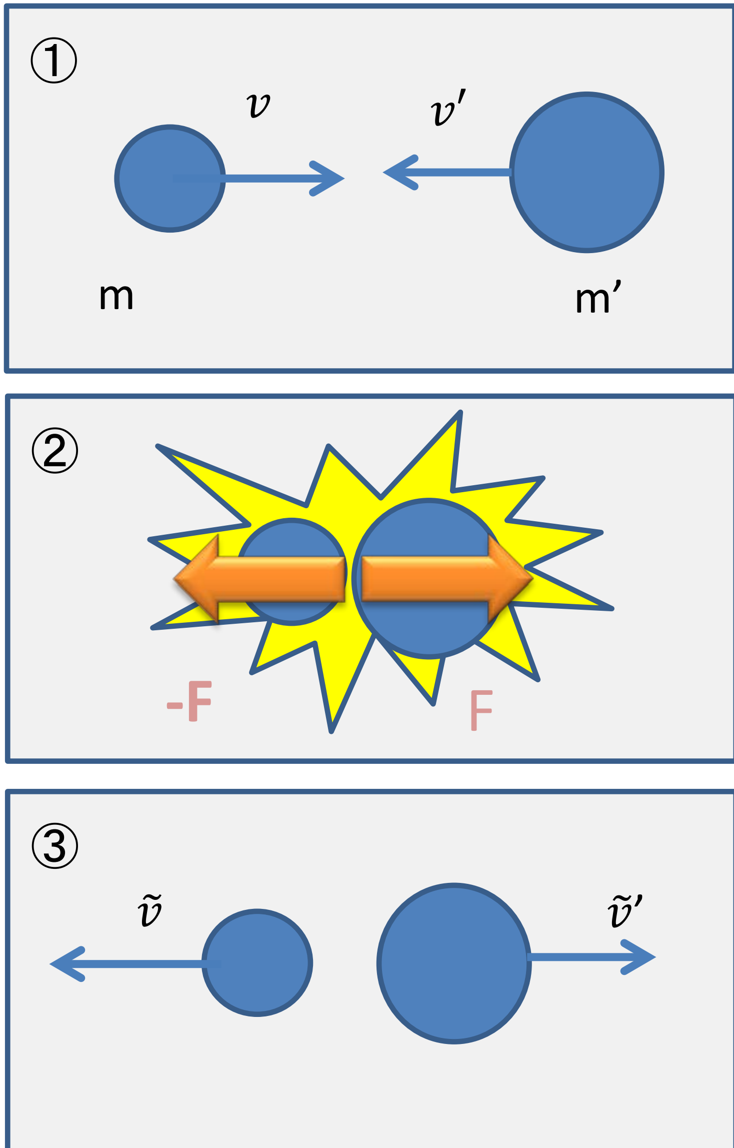
$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + U(x, y, z)$$

＝一定　　となる。

$$U(x, y, z) \equiv -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + C \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

[3] 運動量保存則

簡単のため一次元で考える



この時の運動方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -F & \text{...(i)} \\ m'\dfrac{dv'}{dt} = F & \text{...(ii)} \end{cases}$$

両辺をtで積分し(i)+(ii)をすると

$$\int m\frac{dv}{\cancel{dt}}\cancel{dt} + \int m'\frac{dv'}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = 0$$

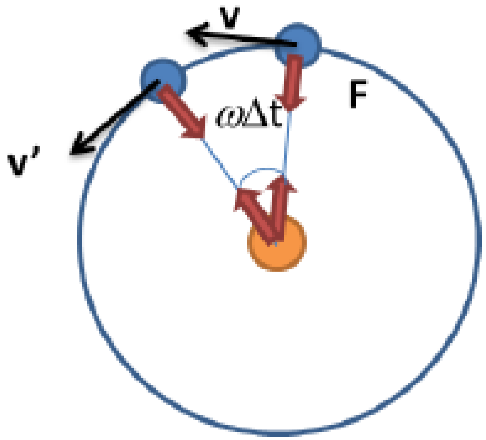
$$\int_{v}^{\tilde{v}} m dv + \int_{v'}^{\tilde{v}'} m' dv' = 0$$

$$m\tilde{v} - mv + m'\tilde{v}' - m'v' = 0$$

$$mv + m'v' = \text{一定}$$

運動量 $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ 量子力学でよく出てくる！

[4] 等速円運動

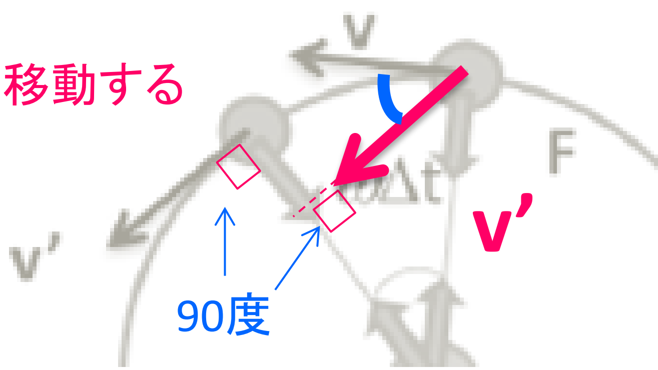


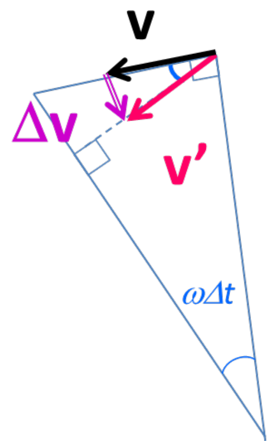
(1)　速さvをr,ωで表せ。

速さ＝1秒で動く距離
角度ωの弧の長さ・・・ $v = r\omega$　答え

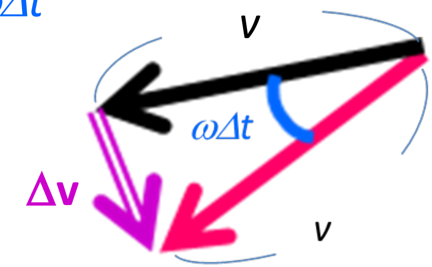
(2)　$\Delta\mathbf{v}$の大きさを求めよ。

v'の支点を移動する





vとv'のなす角は
直角三角形の性質を使って
$\omega\Delta t$



Δvの大きさは
長さv，角度$\omega\Delta t$の二等辺三角形の底辺

$$|\Delta\mathbf{v}| = 2v\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \approx 2v\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = v\omega\Delta t$$ 答え

ただし $\sin x \approx x \quad (x \ll 1)$ を用いた

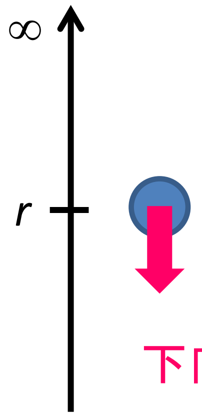
(または初めから円弧に近似してもよい)

(3)vとv'が一致する極限において$\Delta\mathbf{v}$の向きは
vに垂直で、円運動の中心を向いている。
つまり加速度は円の中心に向かっている。
(力の向きと一致する)

$$a = \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = v\omega$$ より、運動方程式は

答え $mv\omega = F$ または $mr\omega^2 = F$ と書ける

[5] 等速円運動(位置エネルギー)



$$F = -\frac{k}{r^2}$$

下向きの力に注意

重力

$$k = GMm$$

クーロン力

$$k = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$$

円運動の位置エネルギー

$$U(r) = -\int F dr + C = -\int\left(-\frac{k}{r^2}\right)dr + C$$

$$= -\frac{k}{r} + C$$

$U(\infty) = 0$ となるようにCを選ぶと

$$U(\infty) = -\frac{k}{\infty} + C = 0 + C = 0 \quad \therefore C = 0$$

$$\underline{U(r) = -\frac{k}{r}}$$

答え

[6] 等速円運動(全エネルギー)

全エネルギーをm,r,ωで表せ。

運動エネルギー $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

$$\because v = r\omega$$

一方、運動方程式より

$$mr\omega^2 = |F| = \frac{k}{r^2}$$

よって

$$U(r) = -\frac{k}{r} = -mr^2\omega^2$$

全エネルギーEは

$$E = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - mr^2\omega^2 = \underline{-\frac{1}{2}mr^2\omega^2}$$

答え