

波動

[9] 弦の振動について、 x と $x+\Delta x$ の間の部分の運動方程式を考えよう。

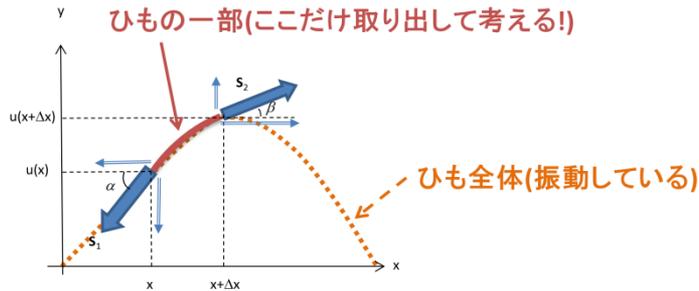
ひもの高さ y は x と t の関数で書けると仮定し、 $y=u(x,t)$ とする。

ひものはしの張力の大きさを S_1 、 S_2 とする。

それぞれなす角を α 、 β とする。

またこのひもの線密度(単位長さあたりの質量)を ρ とすると、

ひものこの区間の質量 m は $\rho \Delta x$ と書ける。



[9] ③ 上式の $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ は $u(x,t)$ を用いると、

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)_x \quad \tan \beta = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

と表される。

下付き添え字の $x, x+\Delta x$ は $x=x, x=x+\Delta x$ の時の微係数を表している。

Δx が0の極限で、ひもの高さ u は以下の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

ヒント $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t)$ とおくと、 $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)_x = f(x,t)$
 $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = f(x+\Delta x,t)$ という意味。

[9] ① x, y 成分の運動方程式を立てよ。質量に m を用いてよい。

<ヒント>

x 成分の張力は (つりあう, つりあわない) が

y 成分の張力は (つりあう, つりあわない)。

また y 方向の加速度は、 $u(x,t)$ の時間2階微分。

② ①でたてた運動方程式から $S = S_1 \cos \alpha$

とおくことで、 $\frac{(\rho \Delta x)}{S} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \tan \beta - \tan \alpha$

となることを確かめよ。

[9] ④ 波の速さ v を $\frac{\rho}{S} = \frac{1}{v^2}$ と定義する。

また変位 $u(x,t)$ は時間に依存する関数 $T(t)$ と位置に依存する関数 $X(x)$

の積で記述できる($u(x,t) = T(t)X(x)$)とし、時間に依存する関数を $T(t) = A \cos \omega t$

と仮定する。ここで ω は角周波数であり、周波数 f とは $f = \omega / 2\pi$ の関係にある。

この時、位置に依存する関数の一例が

$$X(x) = B \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad \text{となることを確かめよ。}$$

ヒント: 周波数 f , 角周波数 ω , 波の速さ v , 波長 λ の関係式を考えよ。

名前

解答用紙

感想・意見・質問 (必須)