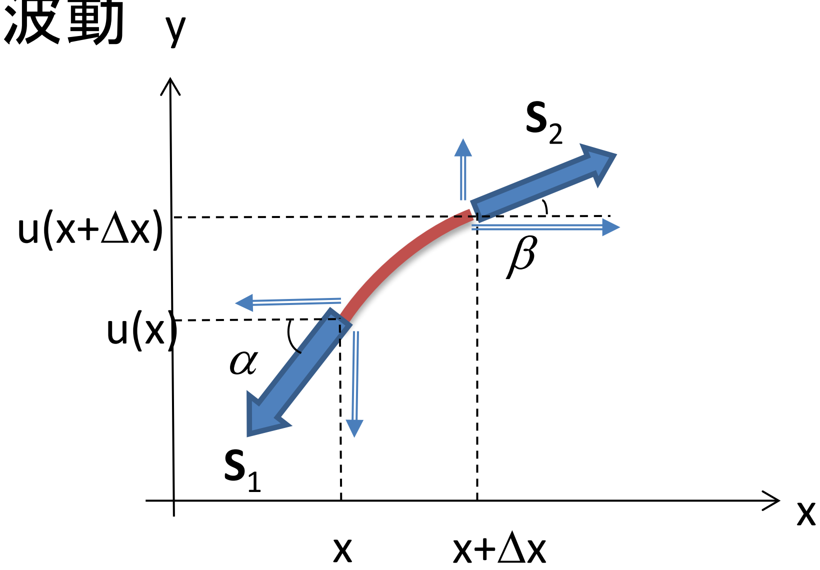
[9]波動



①運動方程式
x成分の張力はつりあい、
y成分はつりあってないので

$$\boxed{\begin{aligned} m\cdot 0 &= S_2\cos\beta - S_1\cos\alpha \quad \text{…(1)} \\ m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= S_2\sin\beta - S_1\sin\alpha \quad \text{…(2)} \end{aligned}}$$

② $S = S_2\cos\beta = S_1\cos\alpha$ …(3) で
(2)式を割る。
また $m = \rho\Delta x$ …(4) も代入すると

$$\frac{\rho\Delta x}{S}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{S_2\sin\beta}{S} - \frac{S_1\sin\alpha}{S}$$

$$= \frac{S_2\sin\beta}{S_2\cos\beta} - \frac{S_1\sin\alpha}{S_1\cos\alpha} = \underline{\tan\beta - \tan\alpha} \quad \text{…(5)}$$

答え

③ tanは傾きなのでxの偏微分で表せる。
簡単のため関数fをuのx偏微分で定義

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)_x \equiv f(x,t) \quad \text{…(6)}$$

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \equiv f(x+\Delta x,t) \quad \text{…(7)}$$

これを(5)に代入し両辺をΔxで割ると

$$\underline{\frac{\rho}{S}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} = \frac{f(x+\Delta x,t) - f(x,t)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \underline{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}} \quad (\Delta x \to 0)$$

…(8)

が得られ題意は示された。

④ $\dfrac{\rho}{S}=\dfrac{1}{v^2}$ を(8)式に代入

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{...(9)}$$

$u(x,t)=A\cos\omega t\cdot X(x)$ ...(10)を(9)に代入

$$\text{左辺}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[A\cos\omega t\cdot X(x)\right]$$

(tでのみ微分)

$$=-\frac{1}{v^2}\omega^2\left[A\cos\omega t\cdot X(x)\right] \qquad \text{...(11)}$$

マイナスに注意

$$\text{右辺}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A\cos\omega t\cdot X(x)\right]$$

(xでのみ微分)

$$=A\cos\omega t\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)\right] \qquad \text{...(12)}$$

左辺＝右辺を$A\cos\omega t$ で割ると、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)=-\frac{\omega^2}{v^2}X(x) \qquad \text{...(13)}$$

2階微分で
負の値×元の関数

これを満たす$X(x)$は $\sin,\cos,\exp\left(i\dfrac{\omega}{v}x\right)$

などが考えられるが、

$X(0)=0$ と実数関数であることから、

$$X(x)=B\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \qquad \text{...(14) となる。}$$

(ここでBは任意の定数)

さらに $v=f\lambda$ と $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ より

$$\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{f\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{...(15) となることから、}$$

$$X(x)=B\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad \text{...(16) となる。}$$

答え

注） $\exp(ax)$ は e^{ax} という意味です！