[10]演算子・固有関数・固有値

① 演算子とは？

$\hat{H}, \hat{O}, \ldots$ のように表され(^はハットと呼ぶ)
演算子の右に書かれた関数に作用し
変化を与える。

② $\hat{H} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ を $f(x) = x^2$ に作用させると

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2) = \frac{d}{dx}(2x) = \underline{2}$$ 答え

③ $\hat{H} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を $f(x, y) = 4x^3y^2 + 5x^2 + 1$ に作用

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[4x^3y^2 + 5x^2 + 1\right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[4x^3y^2 + 5x^2 + 1\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[4x^3y^2 + 5x^2 + 1\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[12x^2y^2 + 10x\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[8x^3y\right]$$

$$= \underline{24xy^2 + 10 + 8x^3}$$ 答え

④固有関数・固有値とは？

ある演算子 $\hat{H}$ に対して演算後、
元の関数の定数倍となる関数fと定数aを
固有関数・固有値という。

$$\hat{H}\ \underline{f} = \underline{a}\ \underline{f}$$

固有関数　固有値

⑤ $\hat{H} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ の固有関数 $f(x)$ の例を示せ。

2階微分しても元の関数の定数倍

$$\boxed{f(x) = e^{ax},\quad \sin ax,\quad \cos ax,\quad e^{iax}\ (a: 実数)}$$

固有値： a^2, $\underbrace{-a^2,\quad -a^2,\quad -a^2}$

正　負

波の式で出てくるのは
負の固有値

⑥

$$\hat{H}_x f(x) = a_x f(x)$$

$$\hat{H}_y g(y) = a_y g(y)$$

を満たすとき、$\hat{H}_x + \hat{H}_y$ を

$f(x)g(y)$ に作用させると、

$$\left(\hat{H}_x + \hat{H}_y\right) f(x) g(y)$$

$$= \hat{H}_x f(x) g(y) + \hat{H}_y f(x) g(y)$$

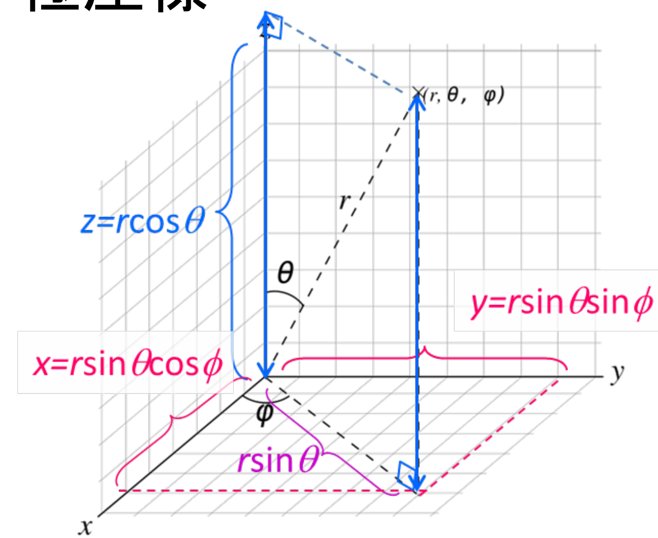
$\hat{H}_x$ は $f(x)$のみに、$\hat{H}_y$ は$g(y)$のみに作用するので、第2項の $\hat{H}_y$ は $f(x)$を通過して $g(y)$ に演算するため

$$= a_x f(x) g(y) + f(x) a_y g(y)$$

$$= \left(a_x + a_y\right) f(x) g(y)$$

したがって$f(x)g(y)$は固有値が $a_x + a_y$ の固有関数になっていることが確かめられた。

[11] 極座標



(x,y,z)…直交座標　(r,θ,φ)…極座標

球のようなものに便利

例　地球　緯度…θ (シータ)

経度…ϕ (ファイ)

$$\begin{cases} \underline{z = r\cos\theta} \\ x = \underline{r\sin\theta}\cos\phi \\ y = \underline{r\sin\theta}\sin\phi \end{cases}$$

各変数の範囲

$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \phi < 2\pi$