解析学A 講義ノート

岡本葵

- 教科書：特に指定しない.
- 参考書：講義内容に関する参考書として次を挙げておく.
  (1) 伊藤清三「ルベーグ積分入門（新装版）」裳華房
  (2) G. B. Folland, “Real Analysis”, Wiley, 2nd edition

授業回数ごとの内容（予定）

第 1 回　可測空間
第 2 回　可測関数
第 3 回　測度空間
第 4 回　単調収束定理
第 5 回　ルベーグの収束定理
第 6 回　完備化
第 7 回　外測度
第 8 回　拡張定理
第 9 回　ルベーグ・スチルチェス測度
第 10 回　積可測空間
第 11 回　積測度
第 12 回　フビニの定理
第 13 回　ルベーグ測度の性質
第 14 回　変数変換の公式
第 15 回　応用

目次

第 1 回

1　測度空間

X は空でない集合，2^X は X の部分集合全体を表すとする．$A \subset X$ に対して，

$$A^c := X \setminus A$$

とする．なお，この表記をする場合には，全集合が何かを意識する必要がある．

$A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_n\},$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \ (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

また，次が成り立つ．

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: **互いに素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A_m \cap A_n = \emptyset \ (m \neq n)$.

1.1　可測空間

定義. $\mathcal{A} \subset 2^X$ とする．

- $\mathcal{A}$: **σ-加法族** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
  (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
  (2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
  (3) $A_n \in \mathcal{A} \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- $(X, \mathcal{A})$: **可測空間** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{A}$: σ-加法族.

  また，$A \in \mathcal{A}$ のとき，A を**可測**という．

命題 1.1. $\mathcal{A}$: σ-加法族とするとき，次が成り立つ．

(1) $A, B \in \mathcal{A}$ のとき，$A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(2) $A_n \in \mathcal{A} \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

命題 1.2. $\mathcal{G} \subset 2^X$ のとき，

$$\sigma[\mathcal{G}] := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} : \sigma\text{-加法族}\}$$

は σ-加法族である．**$\mathcal{G}$ が生成する σ-加法族**という．

定理 1.3. $(X, \mathcal{A})$ は可測空間とし，$E \subset X$ に対して，

$$\mathcal{A}_E := \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$$

とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $(E, \mathcal{A}_E)$ は可測空間である．

(2) $\mathcal{G} \subset 2^X$, $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{G}]$ のとき，$\mathcal{G}_E := \{A \cap E \mid A \in \mathcal{G}\}$ とおけば，$\mathcal{A}_E = \sigma[\mathcal{G}_E]$.

定義. 位相空間 X において，X の開集合全体が生成する σ-加法族を**ボレル集合族**といい，$\mathcal{B}(X)$ で表す．

$A \in \mathcal{B}(X)$ を**ボレル集合**という．

例 1.4. X は位相空間とし，可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ を考える．定義より，X の開集合は可測である．

F: X の閉集合のとき，$F^c = X \setminus F$ は開集合なので，$F^c \in \mathcal{B}(X)$．故に，$F = (F^c)^c \in \mathcal{B}(X)$.

命題 1.5. $O \subset \mathbb{R}$ は開集合のとき，

$$\exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ は開区間の列 s.t. } O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_n (\text{直和}).$$

定理 1.6.

$$\mathcal{I}_1 := \{(a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}, \quad \mathcal{I}_2 := \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

のとき，$\sigma[\mathcal{I}_1] = \sigma[\mathcal{I}_2] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つ．

以上，第 1 回

第 2 回

1.2　拡大実数

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} =$ を**拡大実数**という．また，$[-\infty, +\infty]$ で表すこともある．$\overline{\mathbb{R}}$ の位相は，

$$\phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (x = -\infty) \\ \arctan x & (x \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x = +\infty) \end{cases}$$

により，$\phi : \overline{\mathbb{R}} \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ が誘導する位相として定める．特に，

$$d_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha, \beta) := |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| \quad (\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}})$$

により，$\overline{\mathbb{R}}$ は距離空間である．ϕ により，$\overline{\mathbb{R}}$ と $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ とは同相なので，$\overline{\mathbb{R}}$ は完備な距離空間である．また，$\mathbb{R}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ の開集合である．

$x \in \mathbb{R}$ のとき，

$$x + (\pm\infty) := \pm\infty, \quad x - (\pm\infty) := \mp\infty, \quad x \cdot (\pm\infty) := \begin{cases} \pm\infty & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \mp\infty & (x < 0) \end{cases}$$

と定める．

定理 1.7. $\mathcal{J} := \{(\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とするとき，$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma[\mathcal{J}]$.

定理 1.8. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の相対位相により位相空間とみなすとき，次が成り立つ．

(1) $\mathcal{B}(E) = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$.

(2) $\mathcal{J}_E := \{(\alpha, \infty] \cap E \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とすれば，$\mathcal{B}(E) = \sigma[\mathcal{J}_E]$.

1.3　可測関数

$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ は可測空間とする．

定義. $f : X \to Y$ とする．

f: **$\mathcal{A}/\mathcal{B}$-可測** $\overset{\text{def}}{\iff} B \in \mathcal{B} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ここで，$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ は引き戻しを表す．

命題 1.9. $f: X \to Y$ は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-可測，$\varphi: Y \to Y$ は $\mathcal{B}/\mathcal{B}$-可測
$\Longrightarrow \varphi \circ f$ は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-可測.

定理 1.10. $\mathcal{G} \subset 2^Y$ とし，$\mathcal{B} = \sigma[\mathcal{G}]$ とする．$f: X \to Y$ に対して，次は同値.

(1) f は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$-可測.
(2) $B \in \mathcal{G} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

系 1.11. $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f: X \to E$ のとき，次は同値.

(1) f: $\mathcal{A}/\mathcal{B}(E)$-可測
(2) $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

ここで，$\{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ である．

以下，$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，$\mathcal{A}/\mathcal{B}(E)$-可測を単に，$\mathcal{A}$-可測や可測という．

命題 1.12. $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ について，次の 5 条件は同値である．

(1) f は可測
(2) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.
(3) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.
(4) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$.
(5) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

例 1.13. (1) $A \subset X$ に対して，$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$ を**定義関数**という．$\mathbf{1}_A$: 可測 $\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}$.

(2) X は位相空間とし，$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ は連続のとき，$\mathcal{B}(X)$-可測.

X が位相空間のとき，$\mathcal{B}(X)$-可測のことを**ボレル可測**という．特に，連続関数はボレル可測である．

以上，第 **2** 回

第 3 回

$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする．

定理 1.14. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測とする．$c \in \overline{\mathbb{R}}$ のとき，cf は可測.

定理 1.15. $f, g : X \to \mathbb{R}$ が可測のとき，$f \pm g$ は可測.

定理 1.16. $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ は可測のとき，次の関数は $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数として可測.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

ここで，$\left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ などと定める.

系 1.17. (1) $\forall x \in X$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ は可測.

(2) $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測のとき，$\max(f, g), \inf(f, g)$ は可測.

定義. $s : X \to \mathbb{R}$ とする.

s: **（$\mathcal{A}$-可測）単関数**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$: 互いに素 s.t. $s = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$.

定理 1.18 (単関数近似)**.** $f : X \to [0, \infty]$ は可測

$\Longrightarrow \exists \{s_n\}$: 非負値単関数列 s.t. $s_n(x) \nearrow f(x)$ $(x \in X)$.

つまり，$s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ で，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

1.4 測度

$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする.

定義. $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ とする.

μ: **測度**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- （**σ-加法性**）$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$: 互いに素（i.e., $A_m \cap A_n = \emptyset$ $(m \neq n)$）
  $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

このとき，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**測度空間**という.

なお，σ-加法性は完全加法性ということもある.

例 1.19 (個数測度)**.** $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ を

$$\mu(A) = \begin{cases} A \text{ の元の個数} & (A \text{ が有限集合}) \\ \infty & (A \text{ が無限集合}) \end{cases}$$

とおく．これは測度で，**個数測度**という．特に，$(X, 2^X, \mu)$ は測度空間である．

定理 1.20. (1) （単調性）$A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \le \mu(B)$.

(2) （劣加法性）$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr).$$

(4) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mu(A_1) < \infty$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr).$$

定義. $N \in \mathcal{A}$ とする．

N: **μ-零集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu(N) = 0$.

μ が明らかな場合には，単に零集合という．

$x \in X$ に対して，$P(x)$ は性質とする．

$$\exists N : \mu\text{-零集合 s.t. } \{x \in X \mid P(x) \text{ は成立しない}\} \subset N$$

のとき，「$P(x)$ は μ について X 上ほとんど至る所成立する」という．また，「μ について X 上ほとんど至る所」を「μ-a.e.」と表す．さらに，μ が明らかな場合には，単に “a.e.” とかく．

以上，第 **3** 回

第 4 回

2　ルベーグ積分

2.1　非負値単関数の積分

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とし，$E \in \mathcal{A}$ とする．

定義． $\alpha_j \geq 0$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A}$: 互いに素とし，$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ とする．このとき，

$$\int_E s d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E) \in [0, \infty]$$

と定める．なお，"$0 \cdot \infty = 0$" と定義していたことに注意．

補題 2.1. s, t は非負値可測単関数とする．

(1)　$s \leq t$ のとき，$\displaystyle\int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$.

(2)　$\displaystyle\int_E (s+t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$.

(3)　$c \in [0, \infty)$ のとき，$\displaystyle\int_E cs d\mu = c\int_E s d\mu$.

(4)　$\lambda(A) = \displaystyle\int_A s d\mu$ $(A \in \mathcal{A})$ は測度であり，$\displaystyle\int_E t d\lambda = \int_E st d\mu$.

2.2　非負値可測関数の積分

前節と同様に，$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とし，$E \in \mathcal{A}$ とする．

定義． $f : X \to [0, \infty]$ は可測とする．

$$\int_E f d\mu := \sup\left\{ \int_E s d\mu \mid s : \text{単関数},\ 0 \leq s \leq f \right\}$$

とする．また，$\displaystyle\int_E f d\mu$ を非負値関数 f の E 上の**ルベーグ積分**という．

$\displaystyle\int_E f d\mu < \infty$ のとき，f は E 上**（ルベーグ）可積分**という．

命題 2.2. $f, g : X \to [0, \infty]$ は可測とする．

(1)　$f \leq g$ のとき，$\displaystyle\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

(2)　$c \in [0, \infty)$ のとき，$\displaystyle\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$.

(3) $\displaystyle\int_E f d\mu = \int_X \mathbf{1}_E f d\mu.$

(4) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ のとき，$\displaystyle\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$

定 理 2.3 (単 調 収 束 定 理)**.** $\{f_n\}$: 非 負 値 可 測 関 数 列 で，$n \in \mathbb{N}$ に 対 し て，$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(x \in X)$ とする．このとき，$f := \lim_{n\to\infty} f_n$ は可測で，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

以上，第**4**回

第 5 回

命題 2.4. $f, g : X \to [0,\infty]$ は可測のとき，

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

命題 2.5. $f_n : X \to [0,\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$ は可測とすると，

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

定理 2.6 (ファトゥの補題)**.** $f_n : X \to [0,\infty]$ は可測とするとき，

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

定理 2.7. $f : X \to [0,\infty]$ は可測とする．

(1) $\displaystyle\int_X f d\mu < \infty$ のとき，$f < \infty$ a.s.

(2) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0$ a.e.

2.3 実数値関数の積分

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とする．

定義. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測とし，$f^{\pm} := \max(\pm f, 0)$ とする．$E \in \mathcal{A}$ に対して，$\displaystyle\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ がいずれも ∞ でないとき，

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

を f の**ルベーグ積分**という．

以下，$\mathcal{L}^1(X) := \left\{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ は可測，} \displaystyle\int_X |f| d\mu < \infty \right\}$ とする．

定理 2.8. $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ のとき，$f + g \in \mathcal{L}^1(X)$ であり，

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

また，$f \in \mathcal{L}^1(X), \alpha \in \mathbb{R}$ のとき，$\alpha f \in \mathcal{L}^1(X)$ であり，

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$$

命題 2.9. $f \in \mathcal{L}^1(X)$ のとき，$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

定理 2.10 (ルベーグの優収束定理)**.** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(X)$ は次を満たすとする．

(1) $\forall x \in X, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

(2) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X)$ s.t. $|f_n(x)| \leq g(x)$ $(n \in \mathbb{N}, x \in X)$.

このとき，$f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(X)$ であり，$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. さらに，$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ も成り立つ．

以上，第 **5** 回

第 **6** 回

$(X,\mathcal{A},\mu)$: 測度空間とする．

例 2.11. $\alpha>0$, $f\in\mathcal{L}^1(X)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left(1+\left(\frac{|f|}{n}\right)^{\alpha}\right)d\mu$ を求める．

3　測度空間の完備化

$(X,\mathcal{A},\mu)$ は測度空間とする．

定義.
- 零集合の部分集合全体を $\mathcal{N}$ で表す．つまり，

$$\mathcal{N}:=\{N\subset X\mid \exists A\in\mathcal{A}\text{ s.t. } N\subset A,\ \mu(A)=0\}.$$

- $\mathcal{N}\subset\mathcal{A}$ のとき，$(X,\mathcal{A},\mu)$ は**完備**という．

まず，次のようにおく．

$$\overline{\mathcal{A}}:=\{A\subset X\mid \exists F,G\in\mathcal{A}\text{ s.t. } F\subset A\subset G,\ \mu(G\setminus F)=0\}.$$

定理 3.1. $\overline{\mathcal{A}}=\sigma[\mathcal{A}\cup\mathcal{N}]$．特に，$(X,\overline{\mathcal{A}})$ は可測空間である．

$A\in\overline{\mathcal{A}}$ のとき，$\exists F,G\in\mathcal{A}$ s.t. $F\subset A\subset G$, $\mu(G\setminus F)=0$ となるので，

$$\overline{\mu}(A):=\mu(F)$$

として，$\overline{\mu}:\overline{\mathcal{A}}\to[0,\infty]$ を定める．

定理 3.2. $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ は完備な測度空間であり，$\overline{\mu}(A)=\mu(A)$ $(A\in\mathcal{A})$.

定義. $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ を $(X,\mathcal{A},\mu)$ の**完備化**という．

$(X,\mathcal{A},\mu)$ は測度空間とする．

定理 3.3. $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ とする．

f: $\overline{\mathcal{A}}$-可測 $\iff$ $\exists g$: $\mathcal{A}$-可測 s.t. $f=g$ μ-a.e.

以上，第 **6** 回

第 7 回

4　測度の構成

4.1　外測度

X は空でない集合とする．

定義. $\Gamma : 2^X \to [0,\infty]$ とする．

Γ: **外測度**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \begin{array}{ll} (1) & \Gamma(\emptyset)=0. \\ (2) & （単調性）A \subset B\ (\subset X) \Longrightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B). \\ (3) & （劣加法性）\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X \Longrightarrow \Gamma\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n). \end{array}$$

以下，Γ は X の外測度とする．

定義. $\mathcal{M}_\Gamma := \{A \subset X \mid E \subset X \implies \Gamma(E) = \Gamma(E\cap A) + \Gamma(E \cap A^c)\}$.

$A \in \mathcal{M}_\Gamma$ を Γ に関して**カラテオドリ可測**または **Γ-可測**という．

定理 4.1 (カラテオドリの定理)**.** $\mu := \Gamma|_{\mathcal{M}_\Gamma}$ とするとき，$(X, \mathcal{M}_\Gamma, \mu)$ は完備な測度空間である．

定理 4.2. $\mathcal{E} \subset 2^X$ は $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ を満たすとし，$\gamma : \mathcal{E} \to [0,\infty]$ は $\gamma(\emptyset)=0$ とし，

$$\Gamma(A) := \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(A_n) \mid \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr\}$$

とおく．このとき，Γ は X 上の外測度である．なお，Γ を **γ が導く外測度**という．

例 4.3. 定理 4.2 において，$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_\Gamma$ が成り立つとは限らない．さらに，これが成立したとしても，$\Gamma(A) = \gamma(A)\ (A \in \mathcal{E})$ となるとは限らない．

以上，第 7 回

第 8 回

4.2　拡張定理

定義. $\mathcal{G} \subset 2^X$: **半加法族**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{ll} (1) & \emptyset \in \mathcal{G}. \\ (2) & A, B \in \mathcal{G} \text{ ならば } A \cap B \in \mathcal{G}. \\ (3) & A \in \mathcal{G} \text{ ならば，} \exists n \in \mathbb{N}, \exists \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G} \text{ s.t. } A^c = \bigcup_{j=1}^n A_j \text{（直和）}. \end{array}$$

例 4.4. $\mathbb{R}$ において，

$$\mathcal{I} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

は半加法族である．なお，$a \geq b$ のとき，$(a, b] = \emptyset$ とする．

以下，$\mathcal{G}$ は X の半加法族とする．

定義. $\mu_0 : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ とする．

μ_0: **有限加法的**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} \bullet\ \mu_0(\emptyset) = 0. \\ \bullet\ n \in \mathbb{N}, \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G}\text{: 互いに素} \Longrightarrow \mu_0\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(A_j). \end{array}$$

以下，μ_0 は $\mathcal{G}$ 上有限加法的とし，μ_0 が導く外測度を μ^*, $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ とおく．

定理 4.5. $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.

補題 4.6. $A \in \mathcal{G}$, $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G}$ は互いに素，$\bigcup_{j=1}^n A_j \subset A$ のとき，$\sum_{j=1}^n \mu_0(A_j) \leq \mu_0(A)$.

定理 4.7 (拡張定理)**.** 次は同値.

(1)　$\mu|_{\mathcal{G}} = \mu_0$.

(2)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ は互いに素，$A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{G} \Longrightarrow \mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n)$.

注意. 次の一意性と合わせて，E. ホップの拡張定理の一般化である．

定理 4.8 (一意性)**.** 次を満たすとする．

- （σ-有限）$\exists \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ s.t. $\mu_0(X_n) < \infty$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$.
- ν: $\mathcal{M}_{\mu^*}$ 上の測度 s.t. $A \in \mathcal{G}$, $\mu_0(A) < \infty \Longrightarrow \nu(A) = \mu_0(A)$.

$\Longrightarrow \mu(A) = \nu(A)$ $(A \in \mathcal{M}_{\mu^*})$.

以上，第 8 回

第 9 回

5　ルベーグ・スチルチェス測度

$$\mathcal{I} := \{(a,b] \cap \mathbb{R} \mid -\infty \le a \le b \le \infty\}$$

とおく．以下，$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単調増加とし，

$$\rho(-\infty) := \inf_{x\in\mathbb{R}} \rho(x), \quad \rho(\infty) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \rho(x)$$

とおく．また，$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ が $a \le b$ を満たすとき，

$$\mu_{\rho,0}((a,b] \cap \mathbb{R}) := \rho(b) - \rho(a)$$

とする．

命題 5.1. $I, I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ とし，$I \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ のとき，$\mu_{\rho,0}(I) \le \sum_{j=1}^{n} \mu_{\rho,0}(I_j)$.

また，$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$（直和）のとき，等号が成り立つ．（特に，有限加法的である．）

定理 5.2. ρ は $\mathbb{R}$ 上右連続

$$\iff \quad \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I} \text{ は互いに素，} I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{I} \implies \mu_{\rho,0}(I) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\rho,0}(I_n).$$

定義. ρ は単調増加右連続とし，$\mu_{\rho,0}$ が導く外測度 μ_ρ^* から定理 4.1, 4.7, 4.8, 5.2 で得られる測度空間を $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\rho, \mu_\rho)$ で表し，μ_ρ を**ルベーグ・スチルチェス測度**という．

定義. $\rho(x) = x$ として得られる測度空間を特に**ルベーグ測度空間**といい，$(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), m)$ で表す．m を**ルベーグ測度**，$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ を**ルベーグ可測集合**という．

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{M}(\mathbb{R})$-可測のとき，**ルベーグ可測**という．

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ とし，$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測関数とし，

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in (a,b)) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus (a,b)) \end{cases}$$

を f の**ゼロ拡張**という．$\tilde{f}$ が可測（可積分）のとき，f は可測（可積分）という．さらに，

$$\int_a^b f\,dx := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(a,b)} \tilde{f}\,dm, \quad \int_b^a f\,dx := -\int_a^b f\,dx$$

と定める.

定理 5.3. $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$ とし,

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad (a \leq x \leq b).$$

(1) F は $[a,b]$ 上連続.

(2) f は $c \in (a,b)$ で連続のとき, F は c で微分可能で, $F'(c) = f(c)$.

以上, 第 **9** 回

第 **10** 回

6　積空間での積分

6.1　積可測空間

$(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ は可測空間とする．

定義． (1)

$$\mathcal{R} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

とし，$A \times B \in \mathcal{R}$ を**矩形（集合）**という．

(2) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \sigma[\mathcal{R}]$ を（**直**）**積** σ**-加法族**という．

また，$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ を（**直**）**積可測空間**という．

定理 6.1. X, Y は位相空間とする．

(1) $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.

(2) X, Y: 第二可算的[1] $\Longrightarrow \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

定義． $E \subset X \times Y$ とする．

- $x \in X$ に対して，$E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$ を x**-切片**という．
- $y \in Y$ に対して，$E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$ を y**-切片**という．

命題 6.2. $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ とする．

(1) $x \in X$ に対して，$E_x \in \mathcal{B}$.

(2) $y \in Y$ に対して，$E^y \in \mathcal{A}$.

定義． $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ とする．

- $x \in X$ に対して，$f_x(y) := f(x, y)$ $(y \in Y)$.
- $y \in Y$ に対して，$f^y(x) := f(x, y)$ $(x \in X)$.

1）　第二可算的とは，高々可算個の元からなる開基をもつことをいう．また，$\mathcal{U}$ が X の開基とは，$\mathcal{U}$ は開集合の族で，任意の開集合 O に対して，$\forall x \in O, \exists U \in \mathcal{U}$ s.t. $x \in U \subset O$ を満たすことをいう．

命題 6.3. $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-可測とする．

(1) $x \in X$ に対して，f_x は $\mathcal{B}$-可測．

(2) $y \in Y$ に対して，f^y は $\mathcal{A}$-可測．

6.2 ディンキン族定理

この節では，X は空でない集合とする．

定義. • $\mathcal{D} \subset 2^X$ とする．

$$\mathcal{D}\text{: ディンキン族}(\delta\text{-族})^{2)} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{array}{ll} (1) & X \in \mathcal{D}. \\ (2) & A, B \in \mathcal{D},\ A \subset B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}. \\ (3) & \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D},\ A_n \subset A_{n+1} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}. \end{array}$$

• $\mathcal{G} \subset 2^X$ とする．

$$\delta[\mathcal{G}] := \bigcap \{\mathcal{D} \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{D},\ \mathcal{D} : \delta\text{-族}\}.$$

$\mathcal{G}$ が**生成する δ-族**という．

補題 6.4. $\mathcal{D} \subset 2^X$ は δ-族で，

$$A, B \in \mathcal{D} \implies A \cap B \in \mathcal{D} \qquad \text{（有限交差で閉じる）}$$

ならば，$\mathcal{D}$ は σ-加法族である．

定理 6.5 (ディンキン族定理)**.** $\mathcal{G} \subset 2^X$ は

$$A, B \in \mathcal{G} \implies A \cap B \in \mathcal{G}$$

とする．[3] このとき，$\delta[\mathcal{G}] = \sigma[\mathcal{G}]$.

以上，第 10 回

2) λ-族ともいう．

3) このとき，$\mathcal{G}$ は乗法族または π-族という．さらに，この定理を π-λ 定理ともいう．

第 **11** 回

6.3 積測度

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ は σ-有限な測度空間とする．

命題 6.6. $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ のとき，$x\mapsto\nu(E_x)$ は $\mathcal{A}$-可測．また，$y\mapsto\mu(E^y)$ は $\mathcal{B}$-可測．

定理 6.7. $\exists 1\lambda$: $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上の測度 s.t.

$$\lambda(E)=\int_X \nu(E_x)d\mu(x)=\int_Y \mu(E^y)d\nu(y).$$

定義. 定理 6.7 で与えられる λ を（**直**）**積測度**といい，$\mu\times\nu$ で表す．

6.4 フビニの定理

引き続き，$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ は σ-有限測度空間とする．

定理 6.8 (フビニの定理)**.** $f:X\times Y\to[0,\infty]$ は $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$-可測関数とし，

$$\varphi(x)=\int_Y f_x d\nu \quad (x\in X),\quad \psi(y)=\int_X f^y d\mu \quad (y\in Y)$$

とおく．このとき，φ は $\mathcal{A}$-可測，ψ は $\mathcal{B}$-可測で，

$$\int_X \varphi d\mu=\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_Y \psi d\nu.$$

定理 6.9 (フビニの定理)**.** $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$-可測のとき，次の 3 条件は同値．

(1) $\displaystyle\int_{X\times Y}|f|d(\mu\times\nu)<\infty.$

(2) $\displaystyle\int_X\left(\int_Y|f|d\nu\right)d\mu<\infty.$

(3) $\displaystyle\int_Y\left(\int_X|f|d\mu\right)d\nu<\infty.$

また，このいずれかが成り立つとき，次が成り立つ．

- $\exists\varphi\in\mathcal{L}^1(X)$ s.t. $\varphi(x)=\displaystyle\int_Y f_x d\nu$ μ-a.e.
- $\exists\psi\in\mathcal{L}^1(Y)$ s.t. $\varphi(y)=\displaystyle\int_Y f^y d\mu$ ν-a.e.
- $\displaystyle\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X\varphi d\mu=\int_Y\psi d\nu.$

以上，第 **11** 回

第 **12** 回

定理 6.10. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は σ-有限測度空間，$f : X \to [0, \infty]$ は可測とし，

$$D = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

とするとき，次が成り立つ．

(1) $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(2) $(\mu \times m)(D) = \displaystyle\int_X f d\mu$. ここで，$m$ は 1 次元ルベーグ測度を表す．

(3) $G = \{(x, f(x)) \in D \mid x \in X\}$ のとき，$G \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(\mu \times m)(G) = 0$.

6.5 完備測度に関するフビニの定理

定義. $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ とする．$(d-1)$ 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^{d-1}, \mathcal{M}(\mathbb{R}^{d-1}), m_{d-1})$ が定義されたとき，積測度空間

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_{d-1}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1})} \times m_1|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$$

を完備化した測度空間を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m_d)$ で表し，**d 次元ルベーグ測度空間**という．

定理 6.11 (フビニの定理)**.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ は σ-有限な完備測度空間とする．$f : X \times Y \to [0, \infty]$ は $\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$-可測のとき，次が成り立つ．

- $\exists \varphi$: $\mathcal{A}$-可測 s.t. $\varphi(x) = \displaystyle\int_Y f_x d\nu$ μ-a.e.
- $\exists \psi$: $\mathcal{B}$-可測 s.t. $\varphi(y) = \displaystyle\int_Y f^y d\mu$ ν-a.e.
- $\displaystyle\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$

7 測度の正則性

(X, d) は距離空間，μ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度とする．

定義. μ は**正則** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\exists F : \text{閉集合},\ \exists G : \text{開集合} \quad \text{s.t.}\ F \subset A \subset G,\ \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

命題 7.1. $\mu(X) < \infty$ のとき，μ は正則．

以上，第 **12** 回

第 **13** 回

前回と同様，(X,d) は距離空間，μ は $(X,\mathcal{B}(X))$ 上の測度とする．

定理 7.2. $\exists\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: X の開集合の列 s.t. $X_n \subset X_{n+1}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$[4)]

$\Longrightarrow \mu$ は正則.

8　ルベーグ測度の性質

$d \in \mathbb{N}$ とし，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m_d)$ はルベーグ測度空間とする．混乱の生じないときは，m_d を単に m で表す.

8.1　一意性とアフィン変換

定義. $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対して，

$$Q(a,r) := \prod_{j=1}^{d} (a_j - r, a_j + r]$$

とする．また，

$$\mathcal{Q} := \{Q(a,r) \mid a \in \mathbb{R}^d,\ r > 0\}.$$

命題 8.1. $O \subset \mathbb{R}^d$: 開集合 $\Longrightarrow \exists\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}$ s.t. $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$（直和）.

定理 8.2 (一意性)**.** μ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度で，

$$\mu(Q(a,r)) = (2r)^d \quad (Q(a,r) \in \mathcal{Q})$$

とする．このとき，$\mu(A) = m(A)$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

定理 8.3 (平行移動不変性)**.** $x_0 \in \mathbb{R}^d$ のとき，$x_0 + A := \{x_0 + a \mid a \in A\}$ とすると，

$$m(x_0 + A) = m(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

定理 8.4. d 次正則行列 T を $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{R}^d$ として $\mathbb{R}^d$ 上の写像とみなすとき，

$$m(T(A)) = |\det T| m(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

以上，第 **13** 回

4)　この条件を位相的 σ-有限ということがある.

第 14 回

8.2　変数変換の公式

ここでは，$x \in \mathbb{R}^d$ は縦ベクトルを表すとする．つまり，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ とする．また，

$$\|x\| := \max_{1 \le j \le d} |x_j|$$

と定める．また，$A = (a_{jk})_{j,k=1}^d \in M_d(\mathbb{R})$ に対して，

$$\|A\| := \max_{1 \le j \le d} \sum_{k=1}^d |a_{jk}|$$

とする．

定理 8.5 (変数変換の公式)**.** $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし，$\Phi : U \to V$ は C^1 級微分同相写像とする．つまり，全単射 C^1 級で，逆写像も C^1 級とする．V 上のボレル可測関数 f は,[5)] 非負値またはルベーグ可積分ならば

$$\int_V f dm = \int_U (f \circ \Phi) |\det \Phi'| dm$$

が成り立つ．ここで，$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{pmatrix}$ $(\Phi_j : U \to \mathbb{R})$ として，$\Phi' := \Big(\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\Big)_{j,k=1}^d$ である．

例 8.6 (極座標変換)**.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はボレル可測，ルベーグ可積分のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta \right) dr.$$

以上，第 14 回

5）　f をゼロ拡張した関数が $\mathbb{R}^d$ 上ボレル可測であることを意味する．

第 15 回

定理 8.7. $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし，$\Phi : U \to V$ とする．

(1) $\Phi \in C^1(U; V)$ のとき，零集合 $N \subset U$ に対して，$\Phi(N)$ は零集合である．

(2) Φ は連続，全単射，$\Phi^{-1} \in C^1(V; U)$ のとき，ルベーグ可測関数 $f : V \to \mathbb{R}$ に対して，$f \circ \Phi$ はルベーグ可測である．

定理 8.8 (変数変換の公式). $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし，$\Phi : U \to V$ は C^1 級微分同相写像とする．つまり，全単射 C^1 級で，逆写像も C^1 級とする．このとき，V 上ルベーグ可測関数 f に対して，$f \circ \Phi$ はルベーグ可測．さらに，f が非負値または実数値ルベーグ可積分のとき，

$$\int_V f\,dm = \int_U (f \circ \Phi)|\det \Phi'|\,dm$$

が成り立つ．ここで，$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{pmatrix}$ $(\Phi_j : U \to \mathbb{R})$ として，$\Phi' := \left(\dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=1}^d$ である．

定理 8.9. (1) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測関数とし，

$$F(x, y) = f(x - y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

とするとき，F は $\mathbb{R}^{2d}$ 上のルベーグ可測関数である．

(2) ルベーグ可積分関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して，

$$N = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)|dy = \infty \right\},$$

$$h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy & (x \in \mathbb{R}^d \setminus N) \\ 0 & (x \in N) \end{cases}$$

とおく．このとき，h は $\mathbb{R}^d$ 上ルベーグ可積分で，次が成り立つ．

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g|dx \right).$$

定義. 定理 8.9 の h を f, g の**合成積**といい，$f * g$ で表す．

以上，第 **15** 回