

解析学 A 講義ノート

岡本葵

- 教科書：特に指定しない.
- 参考書：講義内容に関する参考書として次を挙げておく.
 - (1) 伊藤清三「ルベーグ積分入門（新装版）」裳華房
 - (2) G. B. Folland, “Real Analysis”, Wiley, 2nd edition

授業回数ごとの内容（予定）

- 第 1 回 可測空間
- 第 2 回 可測関数
- 第 3 回 測度空間
- 第 4 回 単調収束定理
- 第 5 回 ルベーグの収束定理
- 第 6 回 完備化
- 第 7 回 外測度
- 第 8 回 拡張定理
- 第 9 回 ルベーグ・スチルチェス測度
- 第 10 回 積可測空間
- 第 11 回 積測度
- 第 12 回 フビニの定理
- 第 13 回 ルベーグ測度の性質
- 第 14 回 変数変換の公式
- 第 15 回 応用

目次

1	測度空間	3
1.1	可測空間	3
1.2	拡大実数	5
1.3	可測関数	5
1.4	測度	7
2	ルベーグ積分	9
2.1	非負値単関数の積分	9
2.2	非負値可測関数の積分	9
2.3	実数値関数の積分	11
3	測度空間の完備化	13
4	測度の構成	14
4.1	外測度	14
4.2	拡張定理	15
5	ルベーグ・スチルチェス測度	16
6	積空間での積分	18
6.1	積可測空間	18
6.2	ディンキン族定理	19
6.3	積測度	20
6.4	フビニの定理	20
6.5	完備測度に関するフビニの定理	21
7	測度の正則性	21
8	ルベーグ測度の性質	22
8.1	一意性とアフィン変換	22
8.2	変数変換の公式	23

第1回

1 測度空間

X は空でない集合, 2^X は X の部分集合全体を表すとする. $A \subset X$ に対して,

$$A^c := X \setminus A$$

とする. なお, この表記をする場合には, 全集合が何かを意識する必要がある.

$A_n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) のとき,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in A_n\},$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ } (\forall n \in \mathbb{N})\}.$$

また, 次が成り立つ.

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}: \text{互いに素} \stackrel{\text{def}}{\iff} A_m \cap A_n = \emptyset \text{ } (m \neq n).$$

1.1 可測空間

定義. $\mathcal{A} \subset 2^X$ とする.

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
 - $\mathcal{A}$: σ -加法族 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.
(3) $A_n \in \mathcal{A} \text{ } (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
 - $(X, \mathcal{A})$: 可測空間 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{A}$: σ -加法族.
- また, $A \in \mathcal{A}$ のとき, A を可測という.

命題 1.1. $\mathcal{A}$: σ -加法族とすると, 次が成り立つ.

- (1) $A, B \in \mathcal{A}$ のとき, $A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.
- (2) $A_n \in \mathcal{A} \text{ } (n \in \mathbb{N}) \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

命題 1.2. $\mathcal{G} \subset 2^X$ のとき,

$$\sigma[\mathcal{G}] := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} : \sigma\text{-加法族} \}$$

は σ -加法族である. $\mathcal{G}$ が生成する σ -加法族 という.

定理 1.3. $(X, \mathcal{A})$ は可測空間とし, $E \subset X$ に対して,

$$\mathcal{A}_E := \{ A \cap E \mid A \in \mathcal{A} \}$$

とする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $(E, \mathcal{A}_E)$ は可測空間である.
- (2) $\mathcal{G} \subset 2^X, \mathcal{A} = \sigma[\mathcal{G}]$ のとき, $\mathcal{G}_E := \{ A \cap E \mid A \in \mathcal{G} \}$ とおけば, $\mathcal{A}_E = \sigma[\mathcal{G}_E]$.

定義. 位相空間 X において, X の開集合全体が生成する σ -加法族を **ボレル集合族** といい, $\mathcal{B}(X)$ で表す.

$A \in \mathcal{B}(X)$ を **ボレル集合** という.

例 1.4. X は位相空間とし, 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ を考える. 定義より, X の開集合は可測である.

F : X の閉集合のとき, $F^c = X \setminus F$ は開集合なので, $F^c \in \mathcal{B}(X)$. 故に, $F = (F^c)^c \in \mathcal{B}(X)$.

命題 1.5. $O \subset \mathbb{R}$ は開集合のとき,

$$\exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ は开区間の列 s.t. } O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ (直和).}$$

定理 1.6.

$$\mathcal{I}_1 := \{(a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\}, \quad \mathcal{I}_2 := \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

のとき, $\sigma[\mathcal{I}_1] = \sigma[\mathcal{I}_2] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つ.

以上, 第1回

第2回

1.2 拡大実数

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を **拡大実数** という. また, $[-\infty, +\infty]$ で表すこともある. $\overline{\mathbb{R}}$ の位相は,

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (x = -\infty) \\ \arctan x & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{\pi}{2} & (x = +\infty) \end{cases}$$

により, $\phi: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ が誘導する位相として定める. 特に,

$$d_{\overline{\mathbb{R}}}(\alpha, \beta) := |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| \quad (\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}})$$

により, $\overline{\mathbb{R}}$ は距離空間である. ϕ により, $\overline{\mathbb{R}}$ と $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とは同相なので, $\overline{\mathbb{R}}$ は完備な距離空間である. また, $\mathbb{R}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ の開集合である.

$x \in \mathbb{R}$ のとき,

$$x + (\pm\infty) := \pm\infty, \quad x - (\pm\infty) := \mp\infty, \quad x \cdot (\pm\infty) := \begin{cases} \pm\infty & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \mp\infty & (x < 0) \end{cases}$$

と定める.

定理 1.7. $\mathcal{J} := \{(\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とするとき, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma[\mathcal{J}]$.

定理 1.8. $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の相対位相により位相空間とみなすとき, 次が成り立つ.

- (1) $\mathcal{B}(E) = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$.
- (2) $\mathcal{J}_E := \{(\alpha, \infty] \cap E \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とすれば, $\mathcal{B}(E) = \sigma[\mathcal{J}_E]$.

1.3 可測関数

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ は可測空間とする.

定義. $f: X \rightarrow Y$ とする.

f : **A/B-可測** $\stackrel{\text{def}}{\iff} B \in \mathcal{B} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

ここで, $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ は引き戻しを表す.

命題 1.9. $f: X \rightarrow Y$ は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -可測, $\varphi: Y \rightarrow Y$ は $\mathcal{B}/\mathcal{B}$ -可測

$\implies \varphi \circ f$ は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -可測.

定理 1.10. $\mathcal{G} \subset 2^Y$ とし, $\mathcal{B} = \sigma[\mathcal{G}]$ とする. $f: X \rightarrow Y$ に対して, 次は同値.

- (1) f は $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ -可測.
- (2) $B \in \mathcal{G} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

系 1.11. $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $f: X \rightarrow E$ のとき, 次は同値.

- (1) $f: \mathcal{A}/\mathcal{B}(E)$ -可測
- (2) $\alpha \in \mathbb{R} \implies \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

ここで, $\{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ である.

以下, $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ に対して, $\mathcal{A}/\mathcal{B}(E)$ -可測を単に, $\mathcal{A}$ -可測や可測という.

命題 1.12. $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ について, 次の5条件は同値である.

- (1) f は可測
- (2) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (3) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (4) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (5) 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

例 1.13. (1) $A \subset X$ に対して, $\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$ を**定義関数**という. $\mathbf{1}_A$:

可測 $\iff A \in \mathcal{A}$.

(2) X は位相空間とし, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は連続のとき, $\mathcal{B}(X)$ -可測.

X が位相空間のとき, $\mathcal{B}(X)$ -可測のことを**ボレル可測**という. 特に, 連続関数はボレル可測である.

以上, 第2回

第3回

$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする.

定理 1.14. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とする. $c \in \mathbb{R}$ のとき, cf は可測.

定理 1.15. $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ が可測のとき, $f \pm g$ は可測.

定理 1.16. $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) は可測のとき, 次の関数は $\mathbb{R}$ 値関数として可測.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

ここで, $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ などと定める.

系 1.17. (1) $\forall x \in X$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は可測.

(2) $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測のとき, $\max(f, g), \min(f, g)$ は可測.

定義. $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

s : **($\mathcal{A}$ -可測) 単関数**

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}: \text{互いに素 s.t. } s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}.$$

定理 1.18 (単関数近似). $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は可測

$\implies \exists \{s_n\}$: 非負値単関数列 s.t. $s_n(x) \nearrow f(x)$ ($x \in X$).

つまり, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ で, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$.

1.4 測度

$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする.

定義. $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ とする.

μ : **測度**

- $\mu(\emptyset) = 0$.

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{aligned} &\bullet \text{ (**σ -加法性**) } \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}: \text{互いに素 (i.e., } A_m \cap A_n = \emptyset \text{ (} m \neq n \text{))} \\ &\implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

このとき, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**測度空間**という.

なお, σ -加法性は完全加法性ということもある.

例 1.19 (個数測度). $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\mu(A) = \begin{cases} A \text{ の元の個数} & (A \text{ が有限集合}) \\ \infty & (A \text{ が無限集合}) \end{cases}$$

とおく. これは測度で, **個数測度**という. 特に, $(X, 2^X, \mu)$ は測度空間である.

定理 1.20. (1) (単調性) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

(2) (劣加法性) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \subset A_{n+1} (n \in \mathbb{N})$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

(4) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A_n \supset A_{n+1} (n \in \mathbb{N}), \mu(A_1) < \infty$
 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

定義. $N \in \mathcal{A}$ とする.

N : **μ -零集合** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(N) = 0$.

μ が明らかな場合には, 単に零集合という.

$x \in X$ に対して, $P(x)$ は性質とする.

$$\exists N : \mu\text{-零集合 s.t. } \{x \in X \mid P(x) \text{ は成立しない}\} \subset N$$

のとき, 「 $P(x)$ は μ について X 上ほとんど至る所成立する」という. また, 「 μ について X 上ほとんど至る所」を「 μ -a.e.」と表す. さらに, μ が明らかな場合には, 単に “a.e.” とかく.

以上, 第3回

第4回

2 ルベーク積分

2.1 非負値単関数の積分

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とし, $E \in \mathcal{A}$ とする.

定義. $\alpha_j \geq 0, \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A}$: 互いに素とし, $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ とする. このとき,

$$\int_E s d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E) \in [0, \infty]$$

と定める. なお, “ $0 \cdot \infty = 0$ ” と定義していたことに注意.

補題 2.1. s, t は非負値可測単関数とする.

- (1) $s \leq t$ のとき, $\int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$.
- (2) $\int_E (s + t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$.
- (3) $c \in [0, \infty)$ のとき, $\int_E c s d\mu = c \int_E s d\mu$.
- (4) $\lambda(A) = \int_A s d\mu$ ($A \in \mathcal{A}$) は測度であり, $\int_E t d\lambda = \int_E s t d\mu$.

2.2 非負値可測関数の積分

前節と同様に, $(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とし, $E \in \mathcal{A}$ とする.

定義. $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする.

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E s d\mu \mid s: \text{単関数}, 0 \leq s \leq f \right\}$$

とする. また, $\int_E f d\mu$ を非負値関数 f の E 上の **ルベーク積分** という.

$\int_E f d\mu < \infty$ のとき, f は E 上 **(ルベーク) 可積分** という.

命題 2.2. $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする.

- (1) $f \leq g$ のとき, $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
- (2) $c \in [0, \infty)$ のとき, $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$.

$$(3) \quad \int_E f d\mu = \int_X \mathbf{1}_E f d\mu.$$

$$(4) \quad A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \text{ のとき, } \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

定理 2.3 (単調収束定理). $\{f_n\}$: 非負値可測関数列で, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ($x \in X$) とする. このとき, $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は可測で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

以上, 第4回

第5回

命題 2.4. $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ は可測のとき,

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

命題 2.5. $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ($n \in \mathbb{N}$) は可測とすると,

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

定理 2.6 (ファトウの補題). $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ は可測とすると,

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

定理 2.7. $f : X \rightarrow [0, \infty]$ は可測とする.

- (1) $\int_X f d\mu < \infty$ のとき, $f < \infty$ a.s.
- (2) $\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0$ a.e.

2.3 実数値関数の積分

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とする.

定義. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とし, $f^{\pm} := \max(\pm f, 0)$ とする. $E \in \mathcal{A}$ に対して, $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu$ がいずれも ∞ でないとき,

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \in \mathbb{R}$$

を f の **ルベーグ積分** という.

以下, $\mathcal{L}^1(X) := \left\{ f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ は可測, } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$ とする.

定理 2.8. $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$ のとき, $f + g \in \mathcal{L}^1(X)$ であり,

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

また, $f \in \mathcal{L}^1(X), \alpha \in \mathbb{R}$ のとき, $\alpha f \in \mathcal{L}^1(X)$ であり,

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu.$$

命題 2.9. $f \in \mathcal{L}^1(X)$ のとき, $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$.

定理 2.10 (ルベーグの優収束定理). $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(X)$ は次を満たすとする.

- (1) $\forall x \in X, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.
- (2) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X)$ s.t. $|f_n(x)| \leq g(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x \in X$).

このとき, $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}^1(X)$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. さらに,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ も成り立つ.

以上, 第5回

第6回

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: 測度空間とする.

例 2.11. $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{L}^1(X)$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \log \left(1 + \left(\frac{|f|}{n} \right)^\alpha \right) d\mu$ を求める.

3 測度空間の完備化

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間とする.

定義. • 零集合の部分集合全体を $\mathcal{N}$ で表す. つまり,

$$\mathcal{N} := \{N \subset X \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } N \subset A, \mu(A) = 0\}.$$

• $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ のとき, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は完備という.

まず, 次のようにおく.

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \subset X \mid \exists F, G \in \mathcal{A} \text{ s.t. } F \subset A \subset G, \mu(G \setminus F) = 0\}.$$

定理 3.1. $\overline{\mathcal{A}} = \sigma[\mathcal{A} \cup \mathcal{N}]$. 特に, $(X, \overline{\mathcal{A}})$ は可測空間である.

$A \in \overline{\mathcal{A}}$ のとき, $\exists F, G \in \mathcal{A}$ s.t. $F \subset A \subset G$, $\mu(G \setminus F) = 0$ となるので,

$$\overline{\mu}(A) := \mu(F)$$

として, $\overline{\mu}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$ を定める.

定理 3.2. $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ は完備な測度空間であり, $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ ($A \in \mathcal{A}$).

定義. $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ を $(X, \mathcal{A}, \mu)$ の完備化という.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間とする.

定理 3.3. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする.

$f: \overline{\mathcal{A}}$ -可測 $\iff \exists g: \mathcal{A}$ -可測 s.t. $f = g$ μ -a.e.

以上, 第6回

第7回

4 測度の構成

4.1 外測度

X は空でない集合とする.

定義. $\Gamma: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ とする.

Γ : **外測度**

(1) $\Gamma(\emptyset) = 0$.

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (2) (単調性) $A \subset B (\subset X) \implies \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$.

(3) (劣加法性) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^X \implies \Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$.

以下, Γ は X の外測度とする.

定義. $\mathcal{M}_\Gamma := \{A \subset X \mid E \subset X \implies \Gamma(E) = \Gamma(E \cap A) + \Gamma(E \cap A^c)\}$.

$A \in \mathcal{M}_\Gamma$ を Γ に関して**カラテオドリ可測**または **Γ -可測**という.

定理 4.1 (カラテオドリの定理). $\mu := \Gamma|_{\mathcal{M}_\Gamma}$ とするとき, $(X, \mathcal{M}_\Gamma, \mu)$ は完備な測度空間である.

定理 4.2. $\mathcal{E} \subset 2^X$ は $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ を満たすとし, $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ は $\gamma(\emptyset) = 0$ とし,

$$\Gamma(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) \mid \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

とおく. このとき, Γ は X 上の外測度である. なお, Γ を **γ が導く外測度**という.

例 4.3. 定理 4.2 において, $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_\Gamma$ が成り立つとは限らない. さらに, これが成立したとしても, $\Gamma(A) = \gamma(A)$ ($A \in \mathcal{E}$) となるとは限らない.

以上, 第7回

第 8 回

4.2 拡張定理

定義. $\mathcal{G} \subset 2^X$: **半加法族**

- (1) $\emptyset \in \mathcal{G}$.
- $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (2) $A, B \in \mathcal{G}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{G}$.
- (3) $A \in \mathcal{G}$ ならば, $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G}$ s.t. $A^c = \bigcup_{j=1}^n A_j$ (直和).

例 4.4. $\mathbb{R}$ において,

$$\mathcal{I} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

は半加法族である. なお, $a \geq b$ のとき, $(a, b] = \emptyset$ とする.

以下, $\mathcal{G}$ は X の半加法族とし, $\mu_0 : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ は**有限加法的**とする. つまり,

- $\mu_0(\emptyset) = 0$.
- $n \in \mathbb{N}, \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G}$: 互いに素, $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{G} \implies \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(A_j)$.

また, μ_0 が導く外測度を μ^* , $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ とおく.

定理 4.5. $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.

補題 4.6. $A \in \mathcal{G}, \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{G}$ は互いに素, $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset A$ のとき, $\sum_{j=1}^n \mu_0(A_j) \leq \mu_0(A)$.

定理 4.7 (拡張定理). 次は同値.

- (1) $\mu|_{\mathcal{G}} = \mu_0$.
- (2) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ は互いに素, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G} \implies \mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$.

注意. 次の一意性と合わせて, E. ホップの拡張定理の一般化である.

定理 4.8 (一意性). 次を満たすとする.

- (σ -有限) $\exists \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ s.t. $\mu_0(X_n) < \infty, X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.
- $\nu : \mathcal{M}_{\mu^*}$ 上の測度 s.t. $A \in \mathcal{G}, \mu_0(A) < \infty \implies \nu(A) = \mu_0(A)$.

$$\implies \mu = \nu.$$

以上, 第 8 回

第9回

5 ルベーク・スチルチェス測度

$$\mathcal{I} := \{(a, b] \cap \mathbb{R} \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

とおく. 以下, $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単調増加とし,

$$\rho(-\infty) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \rho(x), \quad \rho(\infty) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(x)$$

とおく. また, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ が $a \leq b$ を満たすとき,

$$\mu_{\rho,0}((a, b] \cap \mathbb{R}) := \rho(b) - \rho(a)$$

とする.

命題 5.1. $I, I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}$ とし, $I \subset \bigcup_{j=1}^n I_j$ のとき, $\mu_{\rho,0}(I) \leq \sum_{j=1}^n \mu_{\rho,0}(I_j)$.

また, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$ (直和) のとき, 等号が成り立つ. (特に, 有限加法的である.)

定理 5.2. ρ は $\mathbb{R}$ 上右連続

$$\iff \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I} \text{ は互いに素, } I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{I} \implies \mu_{\rho,0}(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\rho,0}(I_n).$$

定義. ρ は単調増加右連続とし, $\mu_{\rho,0}$ が導く外測度 μ_{ρ}^* から定理 4.1, 4.7, 4.8, 5.2 で得られる測度空間を $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\rho}, \mu_{\rho})$ で表し, μ_{ρ} を **ルベーク・スチルチェス測度** という.

定義. $\rho(x) = x$ として得られる測度空間を特に **ルベーク測度空間** といい, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), m)$ で表す. m を **ルベーク測度**, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ を **ルベーク可測集合** という.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ -可測のとき, **ルベーク可測** という.

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ は $a < b$ を満たすとし, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in (a, b)) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)) \end{cases}$$

を f の **ゼロ拡張** という. $\tilde{f}$ が可測 (可積分) のとき, f は可測 (可積分) という. さらに,

$$\int_a^b f dx := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(a,b)} \tilde{f} dm, \quad \int_b^a f dx := - \int_a^b f dx$$

と定める.

定理 5.3. $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$ とし,

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad (a \leq x \leq b).$$

(1) F は $[a, b]$ 上連続.

(2) f は $c \in (a, b)$ で連続のとき, F は c で微分可能で, $F'(c) = f(c)$.

以上, 第9回

第10回

6 積空間での積分

6.1 積可測空間

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ は可測空間とする.

定義. (1)

$$\mathcal{R} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

とし, $A \times B \in \mathcal{R}$ を **矩形 (集合)** という.

(2) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \sigma[\mathcal{R}]$ を **(直) 積 σ -加法族** という.

また, $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ を **(直) 積可測空間** という.

定理 6.1. X, Y は位相空間とする.

(1) $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.

(2) X, Y : 第二可算的¹⁾ $\implies \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

定義. $E \subset X \times Y$ とする.

- $x \in X$ に対して, $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$ を **x -切片** という.
- $y \in Y$ に対して, $E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$ を **y -切片** という.

命題 6.2. $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ とする.

(1) $x \in X$ に対して, $E_x \in \mathcal{B}$.

(2) $y \in Y$ に対して, $E^y \in \mathcal{A}$.

定義. $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ とする.

- $x \in X$ に対して, $f_x(y) := f(x, y)$ ($y \in Y$).
- $y \in Y$ に対して, $f^y(x) := f(x, y)$ ($x \in X$).

1) 第二可算的とは, 高々可算個の元からなる開基をもつことをいう. また, $\mathcal{U}$ が X の開基とは, $\mathcal{U}$ は開集合の族で, 任意の開集合 O に対して, $\forall x \in O, \exists U \in \mathcal{U}$ s.t. $x \in U \subset O$ を満たすことをいう.

命題 6.3. $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ -可測とする.

- (1) $x \in X$ に対して, f_x は $\mathcal{B}$ -可測.
- (2) $y \in Y$ に対して, f^y は $\mathcal{A}$ -可測.

6.2 ディンキン族定理

この節では, X は空でない集合とする.

定義. • $\mathcal{D} \subset 2^X$ とする.

$$(1) \quad X \in \mathcal{D}.$$

$$\mathcal{D}: \text{ディンキン族}(\delta\text{-族})^2 \stackrel{\text{def}}{\iff} (2) \quad A, B \in \mathcal{D}, A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

$$(3) \quad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}, A_n \subset A_{n+1} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

- $\mathcal{G} \subset 2^X$ とする.

$$\delta[\mathcal{G}] := \bigcap \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{D}, \mathcal{D}: \delta\text{-族} \}.$$

$\mathcal{G}$ が生成する δ -族という.

補題 6.4. $\mathcal{D} \subset 2^X$ は δ -族で,

$$A, B \in \mathcal{D} \implies A \cap B \in \mathcal{D} \quad (\text{有限交差で閉じる})$$

ならば, $\mathcal{D}$ は σ -加法族である.

定理 6.5 (ディンキン族定理). $\mathcal{G} \subset 2^X$ は

$$A, B \in \mathcal{G} \implies A \cap B \in \mathcal{G}$$

とする.³⁾ このとき, $\delta[\mathcal{G}] = \sigma[\mathcal{G}]$.

以上, 第10回

2) λ -族ともいう.

3) このとき, $\mathcal{G}$ は乗法族または π -族という. さらに, この定理を π - λ 定理ともいう.

第 11 回

6.3 積測度

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ は σ -有限な測度空間とする.

命題 6.6. $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ のとき, $x \mapsto \nu(E_x)$ は $\mathcal{A}$ -可測. また, $y \mapsto \mu(E^y)$ は $\mathcal{B}$ -可測.

定理 6.7. $\exists \lambda: (X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ 上の測度 s.t.

$$\lambda(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

定義. 定理 6.7 で与えられる λ を (直) **積測度** といい, $\mu \times \nu$ で表す.

6.4 フビニの定理

引き続き, $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ は σ -有限測度空間とする.

定理 6.8 (フビニの定理). $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ は $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ -可測関数とし,

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \quad (x \in X), \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \quad (y \in Y)$$

とおく. このとき, φ は $\mathcal{A}$ -可測, ψ は $\mathcal{B}$ -可測で,

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu.$$

定理 6.9 (フビニの定理). $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ -可測のとき, 次の 3 条件は同値.

- (1) $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < \infty$.
- (2) $\int_X \left(\int_Y |f| d\nu \right) d\mu < \infty$.
- (3) $\int_Y \left(\int_X |f| d\mu \right) d\nu < \infty$.

また, このいずれかが成り立つとき, 次が成り立つ.

- $\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(X)$ s.t. $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ μ -a.e.
- $\exists \psi \in \mathcal{L}^1(Y)$ s.t. $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ ν -a.e.
- $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu$.

以上, 第 11 回

第 12 回

定理 6.10. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は σ -有限測度空間, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ は可測とし,

$$D = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

とすると, 次が成り立つ.

- (1) $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (2) $(\mu \times m)(D) = \int_X f d\mu$. ここで, m は 1 次元ルベーグ測度を表す.
- (3) $G = \{(x, f(x)) \in D \mid x \in X\}$ のとき, $G \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(\mu \times m)(G) = 0$.

6.5 完備測度に関するフビニの定理

定義. $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ とする. $(d-1)$ 次元ルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^{d-1}, \mathcal{M}(\mathbb{R}^{d-1}), m_{d-1})$ が定義されたとき, 積測度空間

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_{d-1}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1})} \times m_1|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$$

を完備化した測度空間を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m_d)$ で表し, **d 次元ルベーグ測度空間** という.

定理 6.11 (フビニの定理). $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ は σ -有限な完備測度空間とする. $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ は $\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ -可測のとき, 次が成り立つ.

- $\exists \varphi: \mathcal{A}$ -可測 s.t. $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$ μ -a.e.
- $\exists \psi: \mathcal{B}$ -可測 s.t. $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ ν -a.e.
- $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu$.

7 測度の正則性

(X, d) は距離空間, μ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度とする.

定義. μ は**正則** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall A \in \mathcal{B}(X), \varepsilon > 0$ に対して,

$$\exists F: \text{閉集合}, \exists G: \text{開集合} \text{ s.t. } F \subset A \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

命題 7.1. $\mu(X) < \infty$ のとき, μ は正則.

以上, 第 12 回

第13回

前回と同様, (X, d) は距離空間, μ は $(X, \mathcal{B}(X))$ 上の測度とする.

定理 7.2. $\exists \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: X の開集合の列 s.t. $X_n \subset X_{n+1}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu(X_n) < \infty$ ⁴⁾
 $\implies \mu$ は正則.

8 ルベグ測度の性質

$d \in \mathbb{N}$ とし, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), m_d)$ はルベグ測度空間とする. 混乱の生じないときは, m_d を単に m で表す.

8.1 一意性とアフィン変換

定義. $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対して,

$$Q(a, r) := \prod_{j=1}^d (a_j - r, a_j + r]$$

とする. また,

$$\mathcal{Q} := \{Q(a, r) \mid a \in \mathbb{R}^d, r > 0\}.$$

命題 8.1. $O \subset \mathbb{R}^d$: 開集合 $\implies \exists \{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}$ s.t. $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ (直和).

定理 8.2 (一意性). μ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度で,

$$\mu(Q(a, r)) = (2r)^d \quad (Q(a, r) \in \mathcal{Q})$$

とする. このとき, $\mu(A) = m(A)$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).

定理 8.3 (平行移動不変性). $x_0 \in \mathbb{R}^d$ のとき, $x_0 + A := \{x_0 + a \mid a \in A\}$ とすると,

$$m(x_0 + A) = m(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

定理 8.4. d 次正則行列 T を $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto Tx \in \mathbb{R}^d$ として $\mathbb{R}^d$ 上の写像とみなすとき,

$$m(T(A)) = |\det T| m(A) \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

以上, 第13回

4) この条件を位相的 σ -有限ということがある.

第 14 回

8.2 変数変換の公式

ここでは, $x \in \mathbb{R}^d$ は縦ベクトルを表すとする. つまり, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ とする. また,

$$\|x\| := \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|$$

と定める. また, $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d \in M_d(\mathbb{R})$ に対して,

$$\|A\| := \max_{1 \leq j \leq d} \sum_{k=1}^d |a_{jk}|$$

とする.

定理 8.5 (変数変換の公式). $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし, $\Phi : U \rightarrow V$ は C^1 級微分同相写像とする. つまり, 全単射 C^1 級で, 逆写像も C^1 級とする. V 上のボレル可測関数 f は, ⁵⁾ 非負値またはルベーグ可積分ならば

$$\int_V f dm = \int_U (f \circ \Phi) |\det \Phi'| dm$$

が成り立つ. ここで, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{pmatrix}$ ($\Phi_j : U \rightarrow \mathbb{R}$) として, $\Phi' := \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right)_{j,k=1}^d$ である.

例 8.6 (極座標変換). $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ はボレル可測, ルベーグ可積分のとき,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta \right) dr.$$

以上, 第 14 回

5) f をゼロ拡張した関数が $\mathbb{R}^d$ 上ボレル可測であることを意味する.

第 15 回

定理 8.7. $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし, $\Phi: U \rightarrow V$ とする.

- (1) $\Phi \in C^1(U; V)$ のとき, 零集合 $N \subset U$ に対して, $\Phi(N)$ は零集合である.
- (2) Φ は連続, 全単射, $\Phi^{-1} \in C^1(V; U)$ のとき, ルベーク可測関数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $f \circ \Phi$ はルベーク可測である.

定理 8.8 (変数変換の公式). $U, V \subset \mathbb{R}^d$ は開集合とし, $\Phi: U \rightarrow V$ は C^1 級微分同相写像とする. つまり, 全単射 C^1 級で, 逆写像も C^1 級とする. このとき, V 上ルベーク可測関数 f に対して, $f \circ \Phi$ はルベーク可測. さらに, f が非負値または実数値ルベーク可積分のとき,

$$\int_V f dm = \int_U (f \circ \Phi) |\det \Phi'| dm$$

が成り立つ. ここで, $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_d \end{pmatrix}$ ($\Phi_j: U \rightarrow \mathbb{R}$) として, $\Phi' := \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right)_{j,k=1}^d$ である.

定理 8.9. (1) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ はルベーク可測関数とし,

$$F(x, y) = f(x - y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

とすると, F は $\mathbb{R}^{2d}$ 上のルベーク可測関数である.

- (2) ルベーク可積分関数 $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$N = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)| dy = \infty \right\},$$

$$h(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy & (x \in \mathbb{R}^d \setminus N) \\ 0 & (x \in N) \end{cases}$$

とおく. このとき, h は $\mathbb{R}^d$ 上ルベーク可積分で, 次が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g| dx \right).$$

定義. 定理 8.9 の h を f, g の**合成積**といい, $f * g$ で表す.

以上, 第 15 回