確率統計基礎講義C 講義ノート

岡本葵

- 教科書：特に指定しない.
- 参考書：
  (1) 伊藤清三「ルベーグ積分入門」裳華房
  (2) G. B. Folland, “Real Analysis”, Wiley, 2nd edition

授業回数ごとの内容（予定）

第 1 回　符号付き測度
第 2 回　測度の分解
第 3 回　絶対連続性
第 4 回　ラドン・ニコディムの定理
第 5 回　ルベーグ空間
第 6 回　リースの表現定理
第 7 回　極大関数
第 8 回　ルベーグの微分定理
第 9 回　測度の微分
第 10 回　絶対連続関数
第 11 回　条件付き期待値
第 12 回　条件付き確率
第 13 回　保測変換
第 14 回　エルゴード定理
第 15 回　応用

目次

第 1 回

1　符号付き測度

$(X, \mathcal{A})$ は可測空間とする．

1.1　全変動

定義. ν は $(X, \mathcal{A})$ 上の**符号付き測度**

$\overset{\text{def}}{\iff}$

(1)　$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

(2)　$\nu(\emptyset) = 0$.

(3)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$: 互いに素（i.e., $A_m \cap A_n = \emptyset$ $(m \neq n)$）

$$\Longrightarrow \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

例 1.1.
- μ_1, μ_2 は $(X, \mathcal{A})$ 上の有限測度とする．つまり，$\mu_1(X) < \infty, \mu_2(X) < \infty$ とする．このとき，$\nu = \mu_1 - \mu_2$ は符号付き測度である．
- μ は $(X, \mathcal{A})$ 上の測度，$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可積分のとき，$\nu(A) = \displaystyle\int_A f d\mu$ は符号付き測度である．

以下，特に断らない限り，ν は $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付き測度とする．

命題 1.2. (1)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

(2)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

定義.

$$|\nu|(A) := \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(A_n)| \;\Big|\; \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (\text{直和})\Big\} \quad (A \in \mathcal{A})$$

を ν の**全変動**という．

定理 1.3. $|\nu|$ は $(X, \mathcal{A})$ 上の有限測度である

以上，第 1 回

第 **2** 回

1.2　正変動，負変動

定義.

$$\nu^+ := \frac{1}{2}(|\nu| + \nu), \quad \nu^- := \frac{1}{2}(|\nu| - \nu)$$

をそれぞれ ν の**正変動**，**負変動**という．

$\nu^\pm$ は有限測度であり，

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

と表せる．これを**ジョルダン分解**という．

定理 1.4. $A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ E \subset A\},$$
$$\nu^-(A) = -\inf\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ E \subset A\}.$$

定理 1.5 (ハーン分解)**.** $\exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $\nu^-(A) = 0,\ \nu^+(A^c) = 0.$

2　絶対連続性

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間，ν は $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付き測度とする．

2.1　絶対連続と特異

定義.

- $\nu \ll \mu \overset{\text{def}}{\iff} A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$
  このとき，ν は μ に関して**絶対連続**という．
- $\nu \perp \mu \overset{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(A) = 0,\ |\nu|(A^c) = 0.$
  このとき，ν は μ に関して**特異**という．

例 2.1.

- f は μ-可積分のとき，

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

とすると，$\nu \ll \mu$ である．（実際にはこれしかない．）

- μ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とし，

$$\nu(A) = \delta_0(A) = \begin{cases} 1 & (0 \in A) \\ 0 & (0 \notin A) \end{cases} \quad (A \in \mathcal{M})$$

  とおく（ディラック測度）．$\mu(\{0\}) = 0$, $\nu(\{0\}^c) = 0$ なので，$\nu \perp \mu$.

例 2.2 (カントール関数)**.** $I_0 := [0, 1]$ とし，μ としてルベーグ測度 m を考える．

$$I_{1,1} := \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad I_{1,2} := \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad I_1 := I_{1,1} \cup I_{1,2}$$

とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$I_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ （直和）が与えられたとき，$I_{n,k}$ を 3 等分して，中央の開区間を取り除いてできる 2 つの閉区間を $I_{n+1,2k-1}$，$I_{n+1,2k}$ とし，$I_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,k}$ とおく．このように，帰納的に I_n, $I_{n,k}$ を定める．$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ を**カントール集合**という．

以上，第 2 回

第 **3** 回

命題 2.3. ν_1, ν_2 は $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付き測度とする.

(1) $\nu_1 \ll \mu,\, \nu_2 \ll \mu \Longrightarrow (\nu_1 + \nu_2) \ll \mu$.

(2) $\nu_1 \perp \mu,\, \nu_2 \perp \mu \Longrightarrow (\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$.

命題 2.4. (1) $\nu \ll \mu \Longleftrightarrow |\nu| \ll \mu \Longleftrightarrow (\nu^+ \ll \mu,\, \nu^- \ll \mu)$.

(2) $\nu \perp \mu \Longleftrightarrow |\nu| \perp \mu \Longleftrightarrow (\nu^+ \perp \mu,\, \nu^- \perp \mu)$.

(3) $\nu \ll \mu,\, \nu \perp \mu \Longrightarrow \nu = 0$.

定理 2.5. $\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0$ s.t. $A \in \mathcal{A},\, \mu(A) < \delta \Longrightarrow |\nu(A)| < \varepsilon$.

補題 2.6. $\mu(X) < \infty$, ν は有限測度のとき，次のいずれかが成立.

- $\nu \perp \mu$.
- $\exists \varepsilon > 0,\, \exists E \in \mathcal{A}$ s.t. $\mu(E) > 0,\, (\nu - \varepsilon\mu)^-(E) = 0$.

2.2 ラドン・ニコディムの定理

定理 2.7 (ルベーグ・ラドン・ニコディムの定理)**.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は σ-有限測度空間，ν は $(X, \mathcal{A})$ 上の符号付き測度とするとき，

$$\exists 1 \nu_a, \nu_s : (X, \mathcal{A}) \text{ 上の符号付き測度 s.t. } \nu = \nu_a + \nu_s,\ \nu_a \ll \mu,\ \nu_s \perp \mu.$$

また，ν が有限測度なら ν_a, ν_s も有限測度になる.

さらに，

$$\exists f : \mathbb{R} \text{ 値 } \mu\text{-可積分 s.t. } \nu_a(A) = \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

もし g も同じ条件を満たせば $f = g$ μ-a.e.

以上，第 **3** 回

第 4 回

3 ルベーグ空間

$(X,\mathcal{A},\mu)$ は測度空間とし，$1 \leq p \leq \infty$ とする．可測関数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \inf\{\alpha > 0 \mid \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0\} & (p = \infty) \end{cases}$$

とおく．また，

$$\mathcal{L}^p := \{f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ は } \mathcal{A}\text{-可測}, \ \|f\|_p < \infty\}$$

とする．

3.1 完備性

補題 3.1. $a, b \geq 0$, $\theta \in (0,1)$ のとき，

$$a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b.$$

定理 3.2 (ヘルダーの不等式)**.** $1 < p, q < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき，可測関数 $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

$p \in [1, \infty]$ に対して，

$$p' := \begin{cases} \infty & (p = 1) \\ \dfrac{p}{p-1} & (1 < p < \infty) \\ 1 & (p = \infty) \end{cases}$$

とする．p' を p の**ヘルダー共役指数**という．

以上，第 4 回

第 5 回

定理 3.3 (ミンコフスキーの不等式)**.** $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p$ のとき,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$\|\cdot\|_p$ は $\mathcal{L}^p$ のセミノルムである．そして,

$$B(f,r) = \{g \in \mathcal{L}^p \mid \|f-g\|_p < r\} \quad (f \in \mathcal{L}^p,\ r > 0)$$

を**開球**といい，開球全体を開基とする位相を $\mathcal{L}^p$ に入れる.

定理 3.4. $1 \leq p \leq \infty$ のとき，$\mathcal{L}^p$ は完備である.

つまり，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ は $\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_p = 0$ を満たすとき，$\exists f \in \mathcal{L}^p$ s.t. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

命題 3.5. $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^p$ のとき,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s : \text{単関数 s.t. } \|f - s\|_p < \varepsilon.$$

3.2 共役空間

$1 \leq p \leq \infty$ とする.

定理 3.6. $\Phi : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ は線形写像のとき，次は同値.

(1) Φ は連続

(2) Φ は 0 で連続.

(3) $\exists C > 0$ s.t. $|\Phi(f)| \leq C\|f\|_p$ $(f \in \mathcal{L}^p)$.

定義.
- $(\mathcal{L}^p)^* := \{\Phi \mid \Phi : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ は連続 $\}$.
- $\Phi \in (\mathcal{L}^p)^*$ に対して,

$$\|\Phi\| := \sup_{\substack{f\in\mathcal{L}^p \\ \|f\|_p \neq 0}} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_p}$$

補題 3.7. $\mu(X) < \infty$, $f \in \mathcal{L}^1$ とし，$I \subset \mathbb{R}$ は閉区間とする.

$$E \in \mathcal{A},\ \mu(E) > 0 \implies \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in I$$

ならば $f \in I$ a.e.

以上，第 5 回

第 **6** 回

定理 3.8 (リースの表現定理)**.** μ は σ-有限とする．$1 \leq p < \infty$, $\Phi \in (\mathcal{L}^p)^*$ のとき，

$$\exists g \in \mathcal{L}^{p'} \text{ s.t. } \Phi(f) = \int_X fgd\mu \quad (f \in \mathcal{L}^p), \quad \|g\|_{p'} = \|\Phi\|.$$

ただし，p' は p のヘルダー共役を表す.

$\widetilde{g}$ も同じ条件を満たせば，$g = \widetilde{g}$ a.e.

4　ボレル測度の正則性

$d \in \mathbb{N}$ とし，$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ は測度空間とする．$a \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対して，

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x-a| < r\}$$

とする．

定義. μ は**正則** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\exists F : \text{閉集合},\ \exists G : \text{開集合} \ \text{ s.t. } F \subset A \subset G,\ \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

命題 4.1. $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ のとき，μ は正則.

以上，第 **6** 回

第 7 回

定理 4.2. $\mu(B(0,n)) < \infty$ $(n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \mu$ は正則．

さらに，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A) < \infty$ のとき，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists K : \text{コンパクト s.t. } K \subset A,\ \mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{|x-a| \mid a \in A\}.$$

定義. $C_c(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid \exists R > 0 \text{ s.t. } f(x) = 0\ (|x| > R)\}$

定理 4.3. $\mu(B(0,n)) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．

f: μ-可積分，$\varepsilon > 0$ に対して，

$$\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \int_{\mathbb{R}^d} |f-g|d\mu < \varepsilon.$$

5 ルベーグの微分定理

5.1 極大関数

ν は $(X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の符号付き測度とする．（ルベーグ可測集合族 $\mathcal{M}$ で考えると，符号付き測度も $\mathcal{M}$ で定義されたものを考えなければならず，扱う範囲が狭くなる．）また，

$$(Q_r\nu)(x) := \frac{\nu(B(x,r))}{m(B(x,r))} \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0)$$

とおく．さらに，

$$(M\nu)(x) := \sup_{0<r<\infty} (Q_r|\mu|)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

とし，ν の（ハーディ・リトルウッドの）**極大関数**という．

補題 5.1. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\{M\nu > \alpha\}$ は開集合である．[1)]

特に，$M\nu$ はボレル可測である．

以上，第 7 回

1) このような関数を下半連続という．

第8回

補題 5.2. $N \in \mathbb{N}$ とし，$x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$，$r_1, \ldots, r_N > 0$ とする．このとき，$\exists k \in \{1, \ldots, N\}$, $\exists \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, N\}$ s.t. $\{B(x_{j_k}, r_{j_k})\}_{\ell=1}^k$ は互いに素，

$$\left| \bigcup_{j=1}^N B(x_j, r_j) \right| \leq 3^d \sum_{\ell=1}^k |B(x_{j_\ell}, r_{j_\ell})|.$$

定理 5.3 (極大不等式)**.** $m(\{M\nu > \alpha\}) \leq \dfrac{3^d}{\alpha} |\nu|(\mathbb{R}^d) \quad (\alpha > 0)$.

ルベーグ可積分関数全体を $L^1(\mathbb{R}^d)$ で表す．また，$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f| dm$ とおく．

注意. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ のとき，$d\nu = f dm$ として，

$$(Mf)(x) := M\nu(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| dm$$

と定める．

5.2 ルベーグの微分定理

定義. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ とする．

- $x \in \mathbb{R}^d$ とする．

  x: f の**ルベーグ点** $\overset{\text{def}}{\iff} \displaystyle\lim_{r \to +0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dm(y) = 0.$
- $L_f := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f$ のルベーグ点$\}$.

定理 5.4 (ルベーグの微分定理)**.** $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ のとき，$L_f \in \mathcal{M}$ であり，$m(L_f^c) = 0$.

5.3 測度の微分

この節では，ルベーグ測度 m をボレル集合上 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の測度と考える．

$$(D\nu)(x) := \begin{cases} \displaystyle\lim_{r \to +0} (Q_r \nu)(x) & (\text{この極限が存在するとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおく．

定理 5.5. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とし，$d\nu = f dm$ とするとき，$D\nu = f$ m-a.e.

以上，第8回

第 9 回

定理 5.6. $\nu \perp m$ のとき，$D\nu = 0$ m-a.e.

定義. $x \in \mathbb{R}^d$, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ とする．

$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: **shrink nicely** (s.n.) to x $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } r_n \searrow 0,\ E_n \subset B(x, r_n),\ m(E_n) \geq \alpha m(B(x, r_n)).$$

例 5.7.

- $E_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \times \left[0, \dfrac{10}{n}\right]$ は s.n. to 0.
- $E_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \times \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right]$ は s.n. to 0 ではない．

定理 5.8. $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\{E_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s.n. to x とする．

$d\nu = f dm + d\mu_s$ を ν の m に関するルベーグ分解とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(E_n(x))}{m(E_n(x))} = f(x) \quad m\text{-a.e.}$$

6 絶対連続関数

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．

定義. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ とする．

f: **絶対連続** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. 互いに素な区間 $(a_j, b_j) \subset [a, b]$ $(j = 1, \ldots, n)$,

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

$[a, b]$ 上絶対連続な関数全体を $AC([a, b])$ で表す．

定理 6.1. $g \in L^1([a, b])$ とし，

$$f(x) = \int_a^x g(y) dy \quad (x \in [a, b])$$

とするとき，$f \in AC([a, b])$．また，f は a.e. $t \in [a, b]$ に対して微分可能であり，$f'(x) = g(x)$ a.e. $x \in [a, b]$.

補題 6.2. $U \subset \mathbb{R}$ は開集合のとき，

$$\exists \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \text{ s.t. } U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_n, q_n] \ (\text{直和})$$

以上，第 9 回

第 10 回

定理 6.3. $f \in C([a,b])$ は単調増加とするとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $f \in AC([a,b])$.

(ii) $N \in \mathcal{M}([a,b])$, $m(N) = 0$ ならば $m(f(N)) = 0$.

(iii) a.e. $x \in [a,b]$ に対して f は微分可能である．さらに，$f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ であり，

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)dy \quad (a \leq x \leq b).$$

ただし，$f'(x) := \begin{cases} \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} & (x \in (a,b) \text{ で微分可能}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

定理 6.4. $f \in AC([a,b])$ とし，

$$F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \mid n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x \right\} \quad (x \in [a,b])$$

とする．このとき，F, $F + f$, $F - f$ は $[a,b]$ 上単調増加で，絶対連続.

注意. f が単に $[a,b]$ 上の関数に対して，F を f の**全変動**という．また，$F(b) < \infty$ のとき，f は**有界変動**という．特に，絶対連続関数は有界変動である．

定理 6.5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ とするとき，次の 2 つは同値.

(1) $f \in AC([a,b])$.

(2) a.e. $x \in [a,b]$ で f は微分可能であり，$f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$. さらに，

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)dy \quad (x \in [a,b]).$$

以上，第 10 回

第 **11** 回

7　条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は確率空間とする．つまり，$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ とする．

7.1　定義と基本的性質

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: σ-加法族とする．

定理 7.1. $X \in \mathcal{L}^1$ のとき，$\exists Y \in \mathcal{L}^1$ s.t. Y: $\mathcal{G}$-可測，

$$A \in \mathcal{G} \implies \int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}.$$

また，Y は a.s. で一意．

定義. 上の定理の Y を $\mathcal{G}$ の下での X の**条件付き期待値**といい，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ で表す．

例 7.2.
- $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ のとき，$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$ a.s.
- $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$（自明な σ-加法族）のとき，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ a.s.

命題 7.3. $X, Y \in \mathcal{L}^1$ とする．

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ のとき，$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ a.s.

(2) $X \geq 0$ a.s. $\implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ a.s.

(3) X: $\mathcal{G}$-可測，$XY \in \mathcal{L}^1 \implies \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ a.s.

特に，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ a.s.

(4) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$: σ-加法族 $\implies \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ a.s.

特に，$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$ a.s.

(5) X: $\mathcal{G}$ と独立 $\implies \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ a.s.

系 7.4. (1)　$X \in \mathcal{L}^1$ のとき，$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}]$ a.s.

(2)　$X \in \mathcal{L}^2$ のとき，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^2$ であり，$(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]$ a.s.

命題 7.5. $X_n \geq 0$ a.s., $X_n \nearrow X \in \mathcal{L}^1$ のとき，$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \nearrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

定理 7.6. $X \in \mathcal{L}^2$ のとき，

$$\|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\|_2 = \min\{\|X - Y\|_2 \mid Y \in \mathcal{L}^2,\ Y\text{: } \mathcal{G}\text{-可測}\}.$$

以上，第 **11** 回

第 **12** 回

7.2 条件付き確率

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: σ-加法族とする．$A \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]$$

を $\mathcal{F}$ における A の**条件付き確率**という．

命題 7.7. (1) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \leq 1$ a.s. 特に，$\mathbb{P}(\Omega|\mathcal{G}) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset|\mathcal{G}) = 0$ a.s.

(2) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ は互いに素のとき，

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathcal{G}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{G}) \text{ a.s.}$$

例 7.8. 条件付き期待値や条件付き確率の定義は古典的なものの一般化になっている．

定理 7.9. X: r.v. とするとき，次を満たす $\mu : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ が存在する．

(1) $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，$\mu(\cdot, E)$ は $\mathcal{G}$-可測で，$\mu(\omega, E) = \mathbb{P}(X \in E|\mathcal{G})(\omega)$ a.s. $\omega \in \Omega$.

(2) $\forall \omega \in \Omega$ に対して，$\mu(\omega, \cdot)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度である．

$\tilde{\mu}$ も同じ条件を満たすとき，a.s. $\omega \in \Omega$ に対して，$\mu(\omega, E) = \tilde{\mu}(\omega, E)$ $(E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

注意.
- この定理で得られる μ を $\mathcal{G}$ における X の**正則条件付き分布**という．

以上，第 **12** 回

第 13 回

8　エルゴード性

8.1　保測変換

定義. $\varphi : \Omega \to \Omega$ は可測写像とする．

φ: **保測変換** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathbb{P}(\varphi^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$.

以下，φ は保測変換とする．

定理 8.1 (ポアンカレの回帰定理)**.** $A \in \mathcal{F}$ のとき，a.a. $\omega \in A$ に対して，$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\varphi^n(\omega) \in A$.

定義.
- $A \in \mathcal{F}$ とする．A: **不変** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi^{-1}(A) = A$.
- $\mathcal{I} := \{A \in \mathcal{F} \mid A : 不変\}$.
- φ: **エルゴード的** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \in \mathcal{I} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

例 8.2. $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ とし，μ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とし，$\mathbb{P} = \prod_{n=1}^{\infty} \mu$（直積測度）とする．また，$\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対して，シフト作用素を

$$\varphi(\omega) := \{\omega_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = (\omega_2, \omega_3, \dots)$$

とする．φ はエルゴード的である．

8.2　エルゴード定理

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，

$$\varphi^0(\omega) := \omega \quad (\omega \in \Omega),$$
$$\varphi^n(\omega) := \varphi(\varphi^{n-1}(\omega)) \quad (n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega)$$

と定める．以下，X: r.v. として，

$$X_n(\omega) := X(\varphi^n(\omega)) \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ \omega \in \Omega)$$

とする．

補題 8.3 (最大エルゴード不等式)**.**

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

とし，$M_n = \max_{k=0,\dots,n} S_k$ とおく．このとき，$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{M_n>0\}}] \geq 0$.

定理 8.4 (バーコフのエルゴード定理)**.** $X \in \mathcal{L}^1$ のとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k \to \mathbb{E}[X|\mathcal{I}] \quad \text{a.e. and } \mathcal{L}^1.$$

以上，第 **13** 回

第 14 回

定理 8.5. 次の 3 条件は同値.

(1) φ: エルゴード的

(2) $X \in \mathcal{L}^1$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X \circ \varphi^k = \mathbb{E}[X] \quad \text{a.s.}$$

(3) $A, B \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(A \cap \varphi^{-k}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

8.3 応用例

$\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$ とし，$\mathbb{P} = m$ とする．

$x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\langle x \rangle := x - [x]$$

と定める．$\langle x \rangle \in [0,1)$ に注意.

$\theta \in (0,1)$ とし,

$$\varphi(\omega) := \langle \omega + \theta \rangle \quad (\omega \in \Omega)$$

とする．

定理 8.6 (ワイルの一様分布定理)**.** θ は無理数とする．$0 < a < b < 1$, $\omega \in \Omega$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\varphi^{-k}([a,b))}(\omega) = b - a.$$

以上，第 14 回