修正　2014年3月15日　問合せ：mukaida@hiroshima-u.ac.jp

P.81

(5)　【 別解 】

$$\int \frac{2x}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{2x}{x^4+2x^2+1-x^2}dx = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2-x^2}dx = \int \frac{2x}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2x^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$$

《 ※ 最初の式に「dx」がなかったので加筆. 》

p.56　**例題 4.8**

《 ※ 全面修正 (絶対値の削除による微分の間違い. 増減表の間違い. 面積に関して, 最終的な積分値の間違い) 》

原点 O を時刻 $t=0$ で出発する点 P は, $t=2\pi$ までに, 速度

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\sin t} + \sqrt{1+\cos t}, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

で運動している.

(i) 速度が最大となる時刻 t を求めよ.

(ii) 道のりを求めよ.

【 解答 】(i) 加速度を求める.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\cos t}{2\sqrt{1+\sin t}} + \frac{-\sin t}{2\sqrt{1+\cos t}} = \frac{\cos t}{2\sqrt{1+\sin t}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin t}}{\sqrt{1-\sin t}} + \frac{-\sin t}{2\sqrt{1+\cos t}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1-\cos t}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos t}{|\cos t|} \sqrt{1-\sin t} - \frac{\sin t}{|\sin t|} \sqrt{1-\cos t} \right]$$

ここで, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1-\sin t} - \sqrt{1-\cos t}) \cdot \frac{\sqrt{1-\sin t}+\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1-\sin t}+\sqrt{1-\cos t}} = \frac{\cos t - \sin t}{2(\sqrt{1-\sin t}+\sqrt{1-\cos t})} = g_1(t)$$

一方, $\frac{\pi}{2} \le t < \pi$ のとき,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{1-\sin t}+\sqrt{1-\cos t}) = g_2(t) < 0$$

以下, 同様にして,

$$\pi < t < \frac{3}{2}\pi \text{ のとき} \frac{d^2x}{dt^2} = -g_1(t), \quad \frac{3}{2}\pi < t \le 2\pi \text{ のとき} \frac{d^2x}{dt^2} = -g_2(t) > 0$$

このとき,

t	0	$\cdots$	$\pi/4$	$\cdots$	π	$\cdots$	$5\pi/4$	$\cdots$	$3\pi/2$	$\cdots$	2π
d^2x/dt^2		$+$	0	$-$	$/$	$+$	0	$-$	$/$	$+$	
dx/dt	$1+\sqrt{2}$	↗	最大値	↘	1 (最小かつ極小)	↗	極大値	↘	1 (最小かつ極小)	↗	$1+\sqrt{2}$

したがって, $t=\frac{\pi}{4}$ のとき最大となる.

ここでは, 微分を利用したが, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ に限定できれば, 以下の別解が考えられる.

【 別解 1 】三角関数の半角公式・和積公式を利用する.

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\sin t} + \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} + \sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2}\left\{ \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)} + \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}} \right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{ \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right| + \left|\cos\frac{t}{2}\right| \right\} = \sqrt{2}\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right) + \cos\frac{t}{2} \right\}$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

したがって, $\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{8}=0 \iff t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大となる.
【 別解 2 】$1+\sin t=\sin^2\dfrac{t}{2}+\cos^2\dfrac{t}{2}+2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ を利用して, 三角関数の合成を行う.

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+\sin t}+\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}+\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{t}{2}}$$
$$=\left|\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right|+\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}+(\sqrt{2}+1)\cos\frac{t}{2}$$
$$=\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2}\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{8}\pi\right)=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{3}{8}\pi\right)$$

したがって, $\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{\pi}{2} \iff t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大となる.
【 別解 3 】

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1+\sin t+1+\cos t+2\sqrt{(1+\sin t)(1+\cos t)}=2+\sin t+\cos t+2\sqrt{1+\sin t+\cos t+\sin t\cos t}$$

ここで, $u=\sin t+\cos t$ とおけば, $u^2=1+2\sin t\cos t \iff \sin t\cos t=\dfrac{u^2-1}{2}$. 一方, $u=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるので, $1\leq u\leq\sqrt{2}$ を満足する. 以上から,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2+u+\sqrt{1+u+\frac{u^2-1}{2}}=2+u+\sqrt{2}\cdot\sqrt{u^2+2u+1}=2+u+\sqrt{2}\cdot\sqrt{(u+1)^2}=2+u+\sqrt{2}|u+1|$$

$u+1\geq 2$ であることに注意すれば,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2+u+\sqrt{2}(u+1)=(1+\sqrt{2})u+2+\sqrt{2}\leq 4+2\sqrt{2}$$

等号は, $u=\sqrt{2} \iff t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大となる.
(ii) 道のり L は, (4.5.1) を利用する.

$$L=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{2\pi}(\sqrt{1+\sin t}+\sqrt{1+\cos t})dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left\{\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right|+\left|\cos\frac{t}{2}\right|\right\}dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)dt-\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)dt+\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt$$
$$=\sqrt{2}\left[-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}-\sqrt{2}\left[-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}+\sqrt{2}\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}-\sqrt{2}\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=8\sqrt{2}$$