統計データ解析　補助プリント (向谷-ムカイダニ　総科 C703)

mukaidani@hiroshima-u.ac.jp

2016 年 5 月 30 日 18:25 修正済み

【 離散同時確率分布 】

袋の中に 1 から 6 までの数字が書かれたボールが 1 個ずつ合計 6 個入っている．1 個のさいころを振って出た目を X とし，その数だけ袋からボールを取り出す．このとき，取り出したボールに書かれている数字のうち，最大なものを Y とする．

(1) 同時確率分布 $P(X=k, Y=\ell)$, $(k=1,\ 2,\ \dots, 6,\ \ell=1,\ 2,\ \dots, 6)$ を求めよ．

(2) 周辺分布 $P(X=k)=\displaystyle\sum_{\ell=1}^{6}(X=k, Y=\ell)$, $(k=1,\ 2,\ \dots, 6)$, $P(Y=\ell)=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(X=k, Y=\ell)$, $(\ell=1,\ 2,\ \dots, 6)$ を求めよ．

(3) 期待値 $E(X)$, $E(Y)$ を求め，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を確認せよ．

【 解答 】

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$	$P(Y=\ell)$
$Y=1$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$P(Y=1)=\frac{10}{360}$
$Y=2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{90}$	0	0	0	0	$P(Y=2)=\frac{14}{360}$
$Y=3$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{120}$	0	0	0	$P(Y=3)=\frac{21}{360}$
$Y=4$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{1}{90}$	0	0	$P(Y=4)=\frac{35}{360}$
$Y=5$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{4}{90}$	$\frac{1}{36}$	0	$P(Y=5)=\frac{70}{360}$
$Y=6$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{90}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$P(Y=6)=\frac{210}{360}$
$P(X=k)$	$P(X=1)=\frac{1}{6}$	$P(X=2)=\frac{1}{6}$	$P(X=3)=\frac{1}{6}$	$P(X=4)=\frac{1}{6}$	$P(X=5)=\frac{1}{6}$	$P(X=6)=\frac{1}{6}$	1

(3) $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$

$E(Y)=1\times\frac{10}{360}+2\times\frac{14}{360}+3\times\frac{21}{360}+4\times\frac{35}{360}+5\times\frac{70}{360}+6\times\frac{210}{360}=\frac{1851}{360}$

したがって，$E(X)+E(Y)=\frac{3111}{360}$．一方，$Z=X+Y$ として，Z の確率分布は以下の通り．

Z	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$	$k=12$
$P(Z=k)$	$\frac{10}{360}$	$\frac{10}{360}$	$\frac{14}{360}$	$\frac{18}{360}$	$\frac{25}{360}$	$\frac{35}{360}$	$\frac{42}{360}$	$\frac{46}{360}$	$\frac{50}{360}$	$\frac{50}{360}$	$\frac{60}{360}$

$$E(X+Y)=E(Z)$$
$$=2\times\frac{10}{360}+3\times\frac{10}{360}+4\times\frac{14}{360}+5\times\frac{18}{360}+6\times\frac{25}{360}+7\times\frac{35}{360}+8\times\frac{42}{360}+9\times\frac{46}{360}+10\times\frac{50}{360}+11\times\frac{50}{360}+12\times\frac{60}{360}=\frac{3111}{360}$$

【 補足 】

(i) $P(X=k, Y=\ell)=P(X=k)\times P(Y=\ell)$ が成立すれば独立．本問の場合，独立でない．

(ii) 離散同時確率分布の周辺分布の定義は，

$$P(X=k)=\sum_{\ell=1}^{n}(X=k, Y=\ell),\quad P(Y=\ell)=\sum_{k=1}^{n}(X=k, Y=\ell)$$

である．

(iii) 和の期待値に対しては，$E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n)=a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\cdots+a_nE(X_n)$ は成立するが，$E(XY)=E(X)E(Y)$ は独立でないと成立しない．一般に，

$$E(X+Y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k+y_\ell)P(X=x_k, Y=y_\ell)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}x_kP(X=x_k, Y=y_\ell)+\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}y_\ell P(X=x_k, Y=y_\ell)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_kP(X=x_k)+\sum_{\ell=1}^{n}y_\ell P(Y=y_\ell)=E(X)+E(Y)$$

情報統計学　小テスト:　担当 向谷　博明
2016 年 5 月 30 日

学部	学籍番号	氏名

2 つのコイン A, B があり, A の表の出る確率は p, $(0 < p < 1)$, B の表の出る確率は q, $(0 < q < 1)$ である. 2 つのコインを同時に投げるとき, A が表なら $X = 1$, 裏なら $X = -1$ とし, B が表なら $Y = 1$, 裏なら $Y = -1$ とする.

(1) 同時確率分布 $P(X = k, Y = \ell)$, $(k = -1,\ 1,\ \ell = -1,\ 1)$ を求めよ.

(2) 周辺分布 $P(X = k) = \displaystyle\sum_{\ell=-1}^{1} P(X = k, Y = \ell)$, $(k = -1,\ 1)$, $P(Y = \ell) = \displaystyle\sum_{k=-1}^{1} P(X = k, Y = \ell)$, $(\ell = -1,\ 1)$ を求めよ.

(3) 期待値 $E(X + Y)$, $E(XY)$ を求めよ.

	$X=-1$	$X=1$	$P(Y=\ell)$
$Y=-1$	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q)$	$P(Y=-1) = 1-q$
$Y=1$	$(1-p)q$	pq	$P(Y=1) = q$
$P(X=k)$	$P(X=-1) = 1-p$	$P(X=1) = p$	1

(3) $E(X) = (-1) \times (1-p) + (1) \times p = 2p - 1$. $E(Y) = (-1) \times (1-q) + (1) \times q = 2q - 1$.

	$z=-2$	$z=0$	$z=2$
$P(X+Y=z)$	$(1-p)(1-q)$	$p(1-q)+(1-p)q$	pq

$E(X+Y) = (-2) \times (1-p)(1-q) + 0 \times \{p(1-q) + (1-p)q\} + 2 \times pq = 2p + 2q - 2 = E(X) + E(Y)$.

	$w=-1$	$w=1$
$XY=w$	$p(1-q)+(1-p)q$	$(1-p)(1-q)+pq$

$E(XY) = (-1) \times \{p(1-q) + (1-p)q\} + (1) \times \{(1-p)(1-q) + pq\} = 4pq - 2p - 2q + 1 = (2p-1)(2q-1) = E(X)E(Y)$.