

# 微分積分学 中間試験 (2016年6月17日実施)

【1】数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + 3}$  によって定める.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

《 中間予想問題 1 》 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - a_n^2}$  によって定める.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

(2015 微分積分通論 中間試験)

【2】 $f(x) = \frac{x \log x^2}{x^{-\sin x} - 1}$  とおく.

(1)  $x^{-\sin x}$  の導関数を求めよ.

(2) 極限  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-\sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  を求めよ.

《 中間予想問題 3 》  $f(x) = \frac{x \log x - x}{x^x - 1}$  とおく.

(1)  $x^x$  の導関数を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

を求めよ.

【3】関数  $f(x) = \frac{1}{2}\{g(x)\}^2$ ,  $g(x) = \arcsin x$  に対し, 次の問いに答えよ. ただし  $n$  は自然数である.

(1)  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  を求めよ.

(2) 関数  $f(x)$  は  $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$  を満たすことを示せ.

(3)  $f^{(2n-1)}(0)$ ,  $f^{(2n)}(0)$  を求めよ.

(4) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4}{x^6}$  を求めよ.

《 中間予想問題 2 》 開区間  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  上の関数

$$f(x) = (\sin^{-1} x)(\cos^{-1} x)$$

に対し, 次の問いに答えよ.

(1) 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ.

(2) 関数  $f(x)$  は

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$

を満たすことを示せ. ただし  $n$  は自然数である.

(3)  $f^{(2n)}(0)$  を求めよ.

(2014 総合科学部編入学試験 改)

【4】 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , ( $|x| < 1$ ) とおく.

(1)  $g(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$  のマクローリン展開を  $x^3$  の項まで求めよ. ただし, 剰余項は不要である.

(2)  $f(x)$  のマクローリン展開を  $x^7$  の項まで求めよ. ただし, 剰余項は不要である.

(3) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \log(1-x^2)}{x^4}$  をロピタルの定理による方法とマクローリン展開による方法の2通りの方法によって求めよ.

《 中間予想問題 4 》  $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ , ( $|x| < 1$ ) とおく.

(1)  $f(x)$  のマクローリン展開を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan^{-1} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x + \frac{2}{3}x^3}{\sin^5 x}$$

を求めよ.

【5】曲線  $C$  は媒介変数  $t$  を用いて

$$C : x(t) = t - \frac{1}{2}e^t, \quad y(t) = e^t - \frac{1}{4}e^{2t}$$

と表されている. 増減, 凹凸, 漸近線を調べて概形を描け.

《 中間予想問題 5 》 曲線  $C$  は媒介変数  $t$  を用いて

$$C : x(t) = 3 \cos t + \cos 3t, \quad y(t) = 3 \sin t - \sin 3t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表されている. 増減, 凹凸を調べて概形を描け. また, 速さが最大となる点  $P$  の座標を求めよ.