

令和5年度修士論文

概古典的な仮想結び目の
determinant について

広島大学大学院先進理工系科学研究科数学プログラム

M225524 畑野 友明

主指導教員 藤森 祥一

2024年2月8日

はじめに

円周 S^1 の 3 次元球面 S^3 への埋め込みを結び目という. 結び目の集合に対して, アンビエントイソトピーにより同値関係が定められる. 結び目は, S^3 の良い射影 $p: S^3 \rightarrow S^2$ による像を考え, 各交点に射影に関する上下の情報を与えることで, 平面上の図式として捉えることができる. これを結び目図式という. この結び目図式に対して, Reidemeister 移動という図式の局所変形 (と平面上のイソトピー) による同値関係を考えると, 結び目図式の同値類と, その結び目図式が表す結び目の同値類は一対一に対応することが分かる.

結び目図式の拡張として, S^1 から S^2 へのはめ込みに対し, 2 重点に上下の他に新たな形の情報 (仮想交点) を与える. このようにして与えられる図式は仮想結び目図式として, Kauffman [13] により導入された.

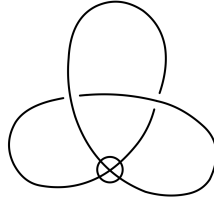


図 1: Virtual trefoil の仮想結び目図式

仮想結び目図式に対して, 通常の Reidemeister 移動に加えて, 新たに仮想交点を含む局所変形 (と平面上のイソトピー) により同値関係を考えることができる. この同値関係による仮想結び目図式の同値類として, 仮想結び目が従来の結び目とは逆説的に定義される. また区別のために, 従来の結び目を古典的結び目という.

仮想結び目図式を考える動機の一つに, 厚みをつけた曲面内の結び目に対し, その曲面への射影による像を平面上の図式として表す方法を与えることがある.

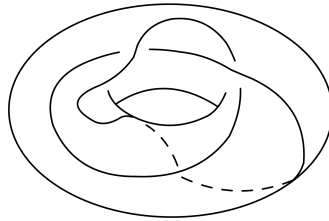


図 2: Virtual trefoil の仮想結び目図式が対応する結び目のトーラスへの射影

古典的結び目に関して, 2つの結び目が同値であることを示すのは容易である一方, 同値でないことを示すのは一般に困難であった. この問題に対処するために, 同値な結び目に対して同じ何らかの値を与える結び目の不変量という概念が考えられる. 古典的結び目に関する結び目の不変量の仮想結び目への拡張は仮想結び目理論における中心的問題の一つである.

Alexander 多項式は, ある条件を満たす仮想結び目に関して拡張可能な不変量の一つである. 向き付けられた古典的結び目に関して, Alexander 多項式は結び目の補空間の基本群の情報から導かれる 1 変数多項式であり, 単元倍による差を除いて well-defined となる. 一方で, 結び目が境界をなす, 向き付けられ, かつ連結でコンパクトな曲面 (Seifert 曲面という) の 1 次元ホモロジー群から得られる正方行列 V (Seifert 行列という) により, $\det(tV - V^T)$ として計算可能である.

Alexander 多項式が拡張可能な仮想結び目のクラスとして, 概古典的な仮想結び目というものが存在する. 概古典的な仮想結び目は Alexander numbering を許容する図式を持つ仮想結び目として, Silver, Williams [20] により導入された. この概古典的な結び目に関して, Alexander 加群の 1 次初等イデアルが単項イデアルであることが Nakamura [16] 等によって示され, 古典的な意味での Alexander 多項式が拡張されることが示唆された. また, 概古典的な仮想結び目は曲面内の結び目としてホモロジカルに自明という性質を持ち, その Seifert 曲面から Alexander 多項式を計算を行うことで, ある条件のもとスケイン関係式が成り立つことが Boden [3] 等によって示された.

概古典的な結び目の Alexander 多項式は, その Seifert 曲面の 1 次元ホモロジー群から得られる 2つの正方行列 V^+, V^- により, $\det(tV^- - V^+)$ として計算できる. また, Alexander 多項式に $t = -1$ を代入し, 絶対値をとった値として, 結び目の determinant がそのまま概古典的な結び目にも拡張される.

Alexander 多項式に関連する古典的結び目の不変量として Conway 多項式が存在する. Conway 多項式は通常, 自明な結び目に対し 1 を返し, スケイン関係式を満たす多項式として定義される. この定義は, 古典的結び目が交差変形により unknotting 可能であることから意味をなすが, 一般の仮想結び目に関しては交差変形により unknotting できないため拡張できない. 一方で, 古典的結び目に関する任意の有限型不変量は, Gauss diagram formula とよばれる, 基点付き Gauss diagram 内の arrow diagram の数え上げにより表されることが Goussarov [11] により示された. Conway 多項式の各項の係数は有限型不変量であることが知られており, 実際に Sergei [6] 等によって Gauss diagram formula による表示が与えられた. これは基点を持つ仮想結び目に対して自然に拡張できる. この様な拡張は 2 種類存在し, それぞれ ascending 多項式, descending 多

項式といい, $\nabla_{\text{asc}}, \nabla_{\text{dsc}}$ と表わす. 古典的結び目に関して, $\nabla_{\text{asc}}, \nabla_{\text{dsc}}$ は基点の選び方によらず, また両者は一致する. 一方で, 一般の仮想結び目に関しては, いずれも成り立たない.

Alexander 多項式と Conway 多項式の関係として, 古典的結び目 K に関して次が成り立つ.

Fact. K のある Seifert 曲面に関する Seifert 行列を V とし, K の Alexander 多項式を $\Delta_K(t) = \det(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^{\top})$ とする. また K の Conway 多項式を $\nabla_K(z)$ とする. このとき,

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$$

が成り立つ.

ここで, $\Delta_K(t) = \det(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^{\top})$ の形で定めた Alexander 多項式を特に, Conway-normalized Alexander 多項式といい, 実質的に Conway 多項式と同じものを表している. またこのことから, K の determinant $\det(K)$ は $|\Delta_K(-1)| = |\nabla_K(-2i)|$ として求められる. 結び目に関して Conway 多項式の奇数次の係数は 0, 定数項は 1 となるので次が成り立つ.

Fact. $v_2(K)$ を $\nabla_K(z)$ の 2 次の係数とする. このとき,

$$\det(K) \equiv \begin{cases} \pm 1 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 0 \pmod{2}) \\ \pm 3 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases} \quad (1)$$

が成り立つ.

本論文では, この結果が概古典的な仮想結び目についても拡張できることを示した. これを証明するにあたり, まず前述したように, 一般の仮想結び目に関して $\nabla_{\text{asc}}, \nabla_{\text{dsc}}$ は基点の選び方に依存し, 両者は一致しないことが問題となる. しかし, 概古典的な結び目に限れば, 2 次の係数 $v_{2,1}, v_{2,2}$ は基点の選び方によらず, 両者は一致することが示される.

定理. G を概古典的な仮想結び目図式の Gauss diagram とする. G の円周上のコードの端点を除く 2 点 a, b を任意に選ぶ. a, b を基点とする Gauss diagram G_a, G_b に対し, $v_{2,1}(G_a), v_{2,1}(G_b)$ をそれぞれ $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(z), \nabla_{\text{asc}}(G_b)(z)$ の 2 次の係数とする. このとき,

$$v_{2,1}(G_a) = v_{2,1}(G_b)$$

が成り立つ. $v_{2,2}$ についても同様のことが成り立つ.

よって, $v_2(K) = v_{2,1}(K) = v_{2,2}(K)$ は K の不変量として well-defined となる. また, 式 (1) を示すにあたり, Conway-normalized Alexander 多項式と $\nabla_{\text{asc}}, \nabla_{\text{dsc}}$ の変数変換 $z = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$ による直接的な関連付けが期待されるが, 一般に概古典的結び目に関する Alexander 多項式は palindromic でないことから成り立たないことがわかる. そこで, 両方の多項式に共通する良い性質を持った descending なる結び目図式のクラスに着目し, そのような図式を基準に両者のスケイン関係式を比較することで式 (1) を示した.

定理. K を概古典的な仮想結び目とする. このとき,

$$\det(K) \equiv \begin{cases} \pm 1 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 0 \pmod{2}) \\ \pm 3 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

が成り立つ.

今後の展望として, 今回示した定理はチェッカーボード彩色可能な結び目に対しての拡張が期待される. 実際, 主定理の証明のための補題の多くが, 主張を適切に調整することでチェッカーボード彩色可能な結び目に対しても同様に成り立つ.

謝辞

主指導教員を引き受けてくださった藤森先生には各種事務手続きに際してお世話になりました. 深く感謝申し上げます. また, 本論文を作成するにあたり, 副指導教員である横浜国立大学の野崎雄太先生には終始適切なご指導を賜りました. 同氏には学部4年からの3年間にわたり, 研究活動を行う上で様々な形でお世話になりました. 横浜国立大学にご異動なされた後も, 週に一度オンラインでのセミナーの機会を設けていただき, 修士課程の最後まで面倒を見ていただいたことを心より感謝いたします. 本当にありがとうございました. 最後に, 6年間にわたる学生生活を温かい目で見守り, 励まし続けてくれた両親に深く感謝いたします.

目次

1	古典的結び目と仮想結び目	6
1.1	古典的絡み目	6
1.2	仮想絡み目	7
1.2.1	Gauss diagram	8
1.2.2	厚みをつけた曲面内の絡み目	10
1.3	結び目群	11
2	概古典的仮想絡み目	12
2.1	定義	12
2.2	性質	12
3	仮想結び目の Alexander 不変量	15
3.1	Alexander 加群	15
3.2	Alexander 多項式	16
3.3	チェッカーボード彩色可能な仮想絡み目の determinant	20
4	Gauss diagram formula と Conway 多項式	21
4.1	古典的結び目の Conway 多項式	21
4.2	Gauss diagram formula による Conway 多項式の再解釈	22
4.3	descending な仮想結び目図式と warping degree	26
5	主結果	27
6	考察と今後の展望	37
6.1	チェッカーボード彩色可能な結び目への拡張	37
6.2	directed Alexander 多項式との比較	38

1 古典的結び目と仮想結び目

本節では、まず古典的な結び目の定義を再確認し、その後、より一般化された概念として仮想結び目を導入する。

1.1 古典的絡み目

定義 1.1. μ 個の互いに交わらない単純閉曲線からなる 3 次元球面 S^3 の部分集合を、 μ 成分の (古典的) 絡み目という。特に 1 成分の絡み目を (古典的) 結び目という。また各成分に向きをつけたものを有向絡み目という。

定義 1.2. L, L' をそれぞれ L_i, L'_i ($i = 1, \dots, \mu$) からなる有向絡み目とする。向きを保つ同相写像 $h: S^3 \rightarrow S^3$ で $h(L_i) = L'_i$ ($i = 1, \dots, \mu$) かつ各 $h|_{L_i}$ も向きを保つものが存在するとき、 L, L' は同値であるという。また、絡み目の同値類を絡み目型という。

以下、混同の恐れがない場合、絡み目型を単に絡み目とよぶ。

定義 1.3. L を絡み目とする。 $\infty \in S^3 \setminus L$ を 1 つ選ぶ。このとき、 \mathbb{R}^3 と $S^3 \setminus \{\infty\}$ 、および \mathbb{R}^2 と $S^2 \setminus \{\infty\}$ の同一視のもと、 $p(\infty) = \infty$, $p(x, y, z) = (x, y)$ で定義された射影 $p: S^3 \rightarrow S^2$ が次の 2 つの条件を満たすとき、射影 p は正則であるという。

- (1) $p|_L$ は高々有限個の 2 重点 (このような点を交点という) を除き同相。
- (2) 各交点 $p(a) = p(b)$ ($a, b \in L, a \neq b$) に関して、 L は a, b の十分小さい近傍内で線形。 (a, b のうち z 座標の大きい方を上交点、もう一方を下交点という。)

絡み目型が正則射影を持つ絡み目を含むとき **tame** であるという。以下、全ての絡み目型は tame であるとする。

定義 1.4. L を正則射影をもつ絡み目とする。また、 L に対する正則な射影 p を一つ選ぶ、このとき、像 $p(L)$ の各 2 重点 $p(a) = p(b)$ ($a, b \in L, a \neq b$) に対し、上交点、下交点の情報を与えたものを L の絡み目図式という。

絡み目型は、以下のように絡み目図式の局所変形による同値類としても捉えられる。

定理 1.5. L, L' を正則射影をもつ同値な絡み目とする。このとき、 L, L' の絡み目図式は、以下の局所変形 (r1)–(r3) と平面上のイソトピーにより移りあう。

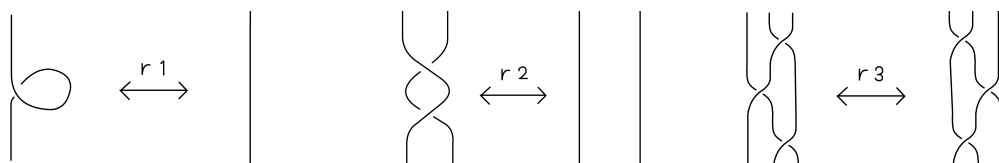


図 3: Reidemeister 移動

局所変形 (r1)–(r3) を **Reidemeister 移動** という。

1.2 仮想絡み目

仮想絡み目の概念は, 古典的絡み目の一般化として, Kauffman により導入された ([13]).

定義 1.6. \mathbb{R}^2 への m 個の S^1 のはめ込みで, 多重点は 2 重点に限られ以下のいずれかにマーキングされたものを, 成分数 m の**仮想絡み目図式**という. 特に, 1 成分のものを**仮想結び目図式**という.



図 4: 実交点と仮想交点

定義 1.7. 2つの仮想絡み目 (結び目) 図式が, 局所変形 (r1)–(r3), (v1)–(v4), および \mathbb{R}^2 上のイソトピーにより移りあうとき, **virtually isotopic** であるという. virtually isotopic による仮想絡み目 (結び目) 図式の同値類を**仮想絡み目 (結び目)** という.

局所変形 (v1)–(v4) を **virtual move** といい, (r1)–(r3), (v1)–(v4) を合わせて一般化された **Reidemeister 移動** という.

以下, 特に断りがない場合, 絡み目 (結び目) とは仮想絡み目 (結び目) を指す.

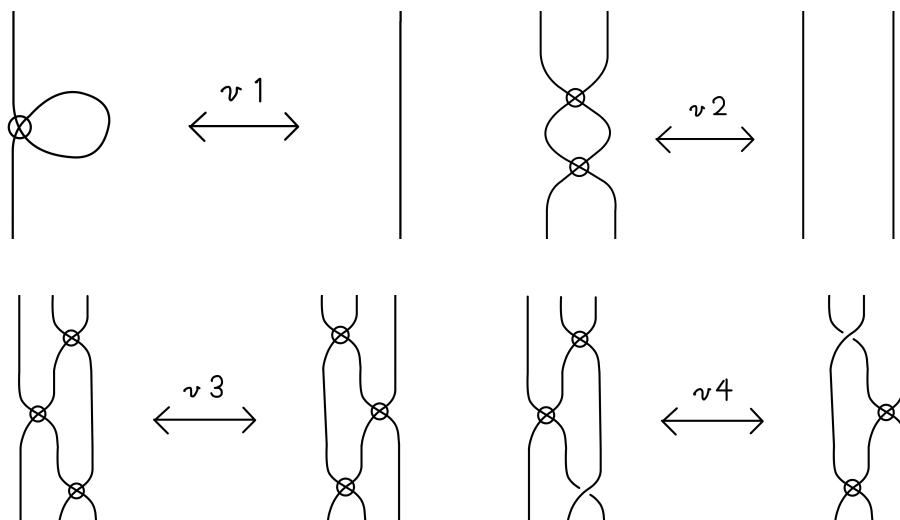


図 5: virtual move

また、一般化されたライデマイスター移動に加えて, forbidden overpass move とよばれる図 6 の局所変形 (f1) を含めて 2 つの仮想絡み目図式が移りあうとき, **welded equivalent** であるという. welded equivalent による仮想絡み目 (結び目) 図式の同値類を **welded link (knot)** という.

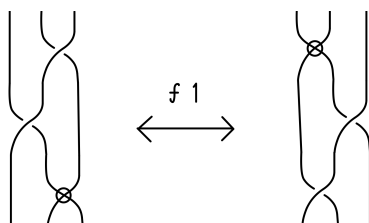


図 6: forbidden overpass move

仮想絡み目図式の各成分に向きを付けることで有向仮想結び目図式が考えられる. このとき, 有向仮想絡み目の virtual isotopy による同値類を有向仮想絡み目と定義する.

今, 図式の局所変形による同値類として仮想絡み目を定義した. 仮想絡み目には, これと同値な定義が主に 2 つ存在する. 以降でそれらを確認していく.

1.2.1 Gauss diagram

有向仮想絡み目図式は向き付けられた円周のはめ込みであるが, この円周上の 2 重点の逆像をコードでつなぎ, 各コードに交差の符号と, 上交点から下交

点への向きを与えたものを **Gauss diagram** という.

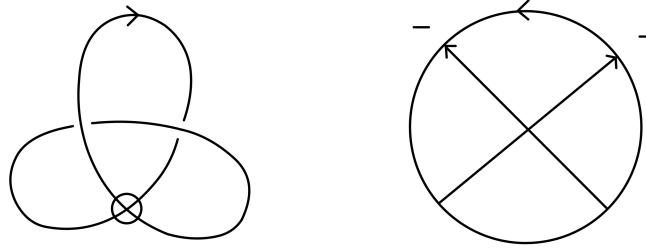


図 7: virtual trefoil とその Gauss diagram

Gauss diagram は実交点の情報のみ抽出したものであり, virtual move のもと不変である. このことから, Gauss diagram は virtual move と平面上のイソトピーによる差異を除いた仮想絡み目図式と解釈できる ([11]). したがって, 仮想結び目は Gauss diagram と, Reidemeister move に対応する図 8 の変形による差を除いて一対一に対応する.

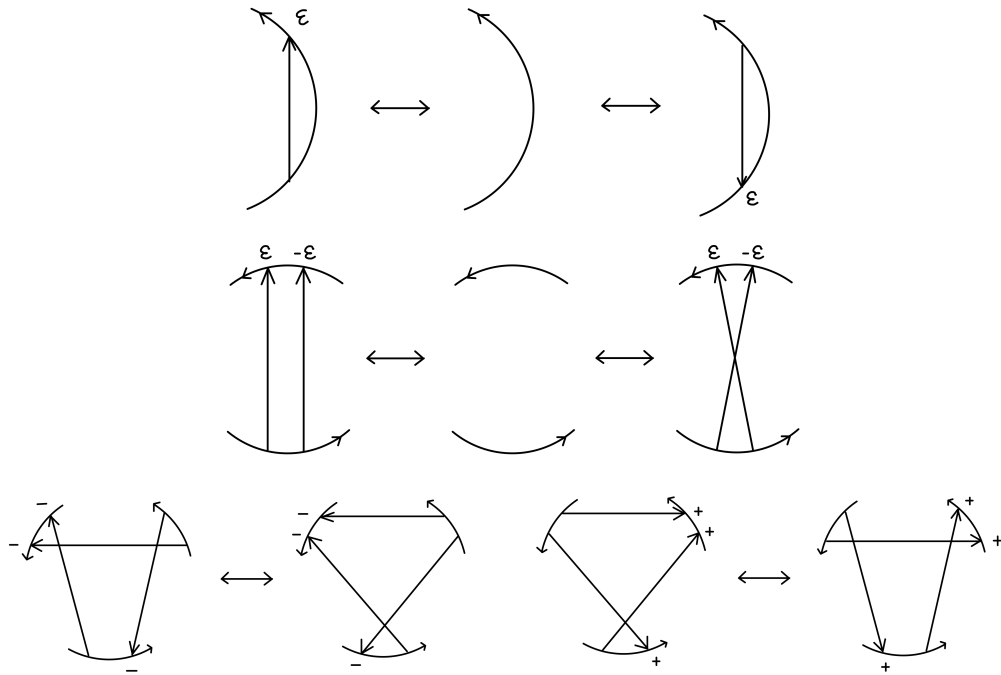


図 8: Reidemeister move に対応する Gauss diagram の変形

1.2.2 厚みをつけた曲面内の絡み目

任意の仮想絡み目図式 K は, 曲面内の絡み目として実現できる.

具体的には次のように構成する: まず図9のように, 各実交点に十字のバンドを, 各仮想交点に交わらないバンドを貼り付ける.

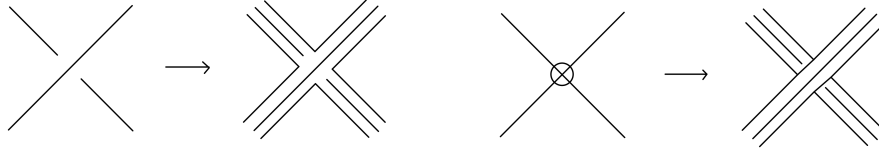


図 9: 各交点に対応するバンド

次に残りの K の弧に沿ってねじれないバンドを貼り付ける. このようにして得られた境界付きの向き付けられた 2 次元多様体に, 各境界成分に 2 次元円板を貼り合わせることで, 図式 K を含む向き付けられた閉曲面 Σ_K が得られる. Σ_K を K の **Carter surface** という. $\Sigma_K \times I$ には, K を射影に持つような絡み目を埋め込める.

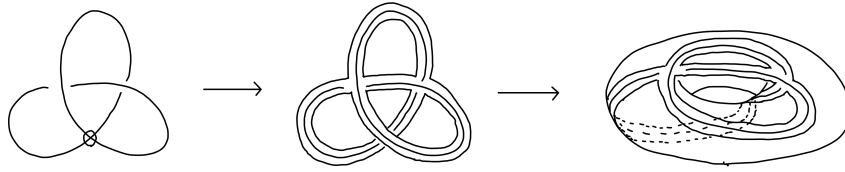


図 10: virtual trefoil の Carter surface

このような厚みをつけた曲面内の絡み目の集合に対し, 以下の同値関係が定められる.

定義 1.8. Σ を向き付けられた曲面, L を $\Sigma \times I$ 内の絡み目とする. $D_1, D_2 \subset \Sigma$ を L の射影とは交わらないディスクとする. ここで Σ から D_1, D_2 を引き抜き, 生じた境界どうしを 2 次元の 1 ハンドルでつないで得られる曲面を Σ' とする. このとき $L' \subset \Sigma' \times I$ を $L \subset \Sigma \times I$ の安定化という.

絡み目 $L_1 \subset \Sigma_1 \times I$, $L_2 \subset \Sigma_2 \times I$ が安定化, またはその逆の操作 (非安定化という), およびアンビエントイソトピー, 曲面の向きを保つ微分同相で互いに移りあうとき安定同値であるという.

厚みをつけた曲面内の絡み目の安定同値類は, 仮想絡み目と一対一に対応することが知られている ([5]).

また、より強い結果として厚みをつけた曲面内の絡み目の安定同値類は、一意に既約な代表元を持つことが知られている ([14]). ここで既約とは、これ以上非安定化できないことを意味する.

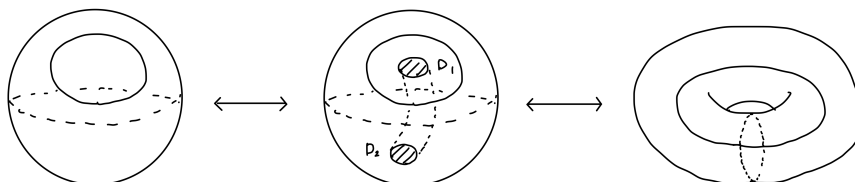


図 11: 安定化の例

1.3 結び目群

古典的結び目に対し、結び目の管状近傍の補空間の基本群として結び目群なるものが定義される. この群は Wirtinger 表示という有向結び目図式に由来する表示の仕方が存在する. この図式を用いた群表示を有向仮想結び目図式に対しても拡張することで、結び目群の概念が仮想結び目に対しても同様に拡張される.

K を n 個の実交点を持つ、有向仮想結び目図式とする. また、結び目図式上に一つ基点を選んでおく. この基点から向きに従って、下交差区切りで弧を a_1, a_2, \dots, a_n とラベル付けしていく. このとき各 $i = 1, \dots, n$ に対し、 a_i が入る交差は、その符号 $\varepsilon_i = \pm 1$ によって図 12 のいずれかの形になっている. (ここで対応するメリディアンは right-handed とし、 π_1 の元は右から読む.)

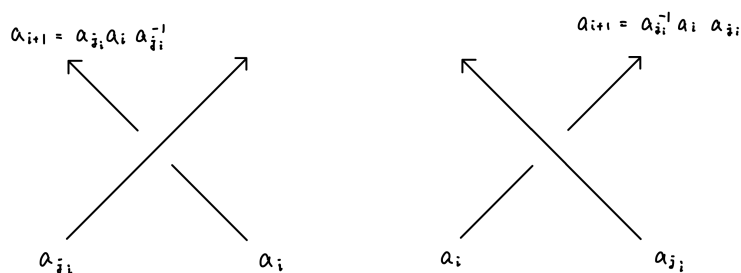


図 12: 各交差に対応する関係

K の結び目群を

$$G_K = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_{i+1} = a_{j_i}^{\varepsilon_i} a_i a_{j_i}^{-\varepsilon_i}, i = 1, \dots, n \rangle$$

と定義する.

結び目群 G_K は局所変形 (r1)–(r3), (v1)–(v4), (f1) に対して不変である. よって G_K は K の welded equivalent による同値類に関する不変量である.

2 概古典的仮想絡み目

本節では, [3] の内容を中心に概古典的な結び目の概念を導入し, またその性質について紹介する.

2.1 定義

概古典的な仮想絡み目は Silver, Williams [20] により導入された.

定義 2.1. (i) 整数 $p \geq 0$ が与えられているとする. 有向仮想絡み目図式 D に対して, short arc (D を全ての交点で分割したもの) の集合上の整数値関数 λ が存在し, 図 13 を満たすとき, 図式 D は **mod p Alexander numberable** であるという. 特に $p = 0$ の場合 (このとき図 13 の関係は整数としての等式とみなす), 図式 D は **Alexander numberable** であるという.

(ii) 有向仮想絡み目 K が mod p Alexander numberable な図式を許容するとき, K は **mod p 概古典的** であるという. 特に $p = 0$ の場合, K は **概古典的** であるという.

任意の有向古典的結び目図式は Alexander numberable である ([1]).

例 2.2. 概古典的仮想結び目図式の例として図 14 のようなものが考えられる.

2.2 性質

概古典的な仮想絡み目には, それぞれ Gauss diagram, 厚みをつけた曲面内の結び目の観点からも, ある性質を満たすものとして解釈できる.

定義 2.3. G を Gauss diagram とし, そのコードを c_1, \dots, c_n とする. このとき各コード c_i について

$$r_{\pm} = \{c_i \text{ から見て右に向かって交わる } \pm \text{ コードの数} \}$$

$$l_{\pm} = \{c_i \text{ から見て左に向かって交わる } \pm \text{ コードの数} \}$$

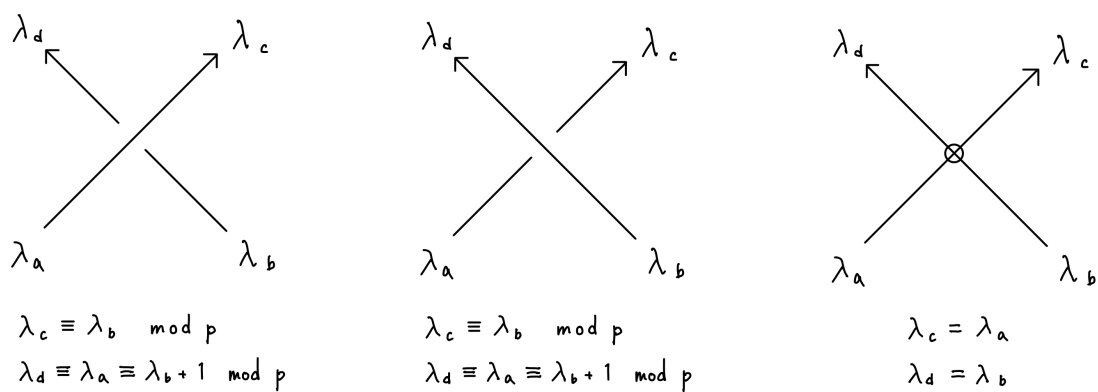


図 13: 各交点の周りの Alexander numbering

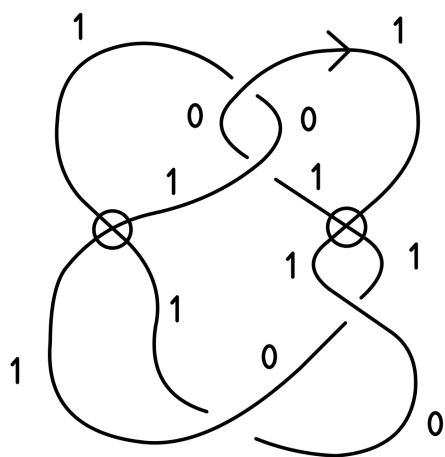


図 14: 概古典的な仮想結び目図式と Alexander numbering の一例

と定める. これらを用いて, Gauss diagram G のコード c_i の指数を $I(c_i) = \varepsilon_i(r_+ - r_- + l_- - l_+)$ で定義する. (ε_i はコード c_i の符号.)

命題 2.4. Gauss diagram G で表される有向仮想絡み目図式が Alexander numberable であることと, 各コード c_i について $I(c_i) = 0$ が成り立つことは同値である.

証明. (\Rightarrow) コード c_i を任意にとる. c_i の符号 $\varepsilon_i = \pm 1$ に対して Alexander numberable の条件より, コード c_i の端点の周りで図 15 のように整数を対応させることができる. ここで c_i から向かって右に位置するコードの端点に着目する. コードの向きと符号によって, 端点の前後で対応する値は ± 1 変化する. 具体的には, 端点が arrowhead の場合, 符号 ± 1 によって対応する値は ± 1 変化する. 端点が arrowtail の場合, 符号 ± 1 によって対応する値は ∓ 1 変化する. ここで c_i と交わらないコードは, arrowhead と arrowtail での変化は打ち消しあうため, c_i の周りでの対応する値が一致するための条件は $r_+ - r_- + l_- - l_+ = 0$. すなわち $I(c_i) = 0$ が成り立つこととなる.

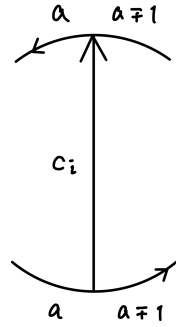


図 15: コード c_i の周りの Alexander number

(\Leftarrow) コード c_i の arrowtail の向かって左に整数 a を対応させるとする. ここで各コードの端点の前後で, 端点が arrowhead の場合, 符号が ± 1 ならば ± 1 , 端点が arrowtail の場合, 符号が ± 1 ならば ∓ 1 変化させながら, 端点で分割される各弧に整数を対応させていく. このとき各コード c_i の端点の周りで, 各弧に対応する値は, 仮定 $I(c_i) = 0$ より, 前述のように一致することがわかる. よって, Alexander numberable である. \square

定理 2.5 ([3, Theorem 6.1]). 有向仮想絡み目 K について以下は同値である.

- (a) K は概古典的.

- (b) K は $\Sigma \times [0, 1]$ の内部に埋め込まれた絡み目としてホモロジカルに自明.
ここで Σ は K の Alexander numberable な図式から構成される Carter surface とする.
- (c) K は $\Sigma \times [0, 1]$ の内部に埋め込まれた連結かつ向き付けられた曲面 F の境界をなす. ここで Σ は同様に K の Alexander numberable な図式から構成される Carter surface とする.

このような曲面 F を K の **Seifert 曲面** という.

証明. (a) \Rightarrow (b). Alexander numberable な仮想結び目図式 K について, Carter surface Σ_K は CW 複体とみなすことができる. (実交点を 0-セル, 各辺を 1-セル, ディスク D_1, \dots, D_n を 2-セルとする.) これらのディスク D_i に対して, そのディスクを右手に持つ辺の Alexander number λ_i を対応させる. Alexander number の定め方より, λ_i は辺の選び方によらず well-defined である. このとき, K の任意の辺について, 左側のディスクに対応する値は右側のディスクより 1 大きい. このことから, $\partial(\lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_n D_n) = K$ が成り立つ. よって, $[K] = 0 \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$. すなわち, K はホモロジカルに自明である.

(b) \Rightarrow (a). $\Sigma \times [0, 1]$ 内の絡み目 K が $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ の元として自明であるとき, 前述の $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ のように Carter surface Σ_K の 2-ディスク D_1, \dots, D_n の Alexander number が誘導される. これは K の Alexander numbering を与える.

(c) \Rightarrow (b) は明らか. 一方で (b) \Rightarrow (c) については, 一般の向き付けられた 3 次元多様体内のホモロジカルに自明な絡み目がザイフェルト曲面を持つことが良く知られている ([9, Lemma 2.2]). (具体的にザイフェルト曲面を構成するためのアルゴリズムも存在する ([3, 7]).) \square

3 仮想結び目の Alexander 不変量

本節では, 引き続き [3] を参考に, 概古典的な仮想結び目に関する Alexander 多項式の定義とその性質について紹介する.

古典的結び目に関して, その結び目群から Alexander 不変量なるものが定義された. 仮想結び目に関しても, 結び目群に対し, その定義を流用することで Alexander 不変量を定義することが可能である.

3.1 Alexander 加群

K を有向仮想結び目とする. また, K の結び目群を $G_K = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ とする. ここで, $G'_K = [G_K, G_K]$, $G''_K = [G'_K, G'_K]$ をそれぞれ

1,2 次の交換子部分群とする. このとき, 商群 G'_K/G''_K を K の **Alexander 加群** という. Alexander 加群は Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 上の有限生成な加群であり, 表現行列 A をもつ. ここで A は G_K の関係子 r_j を生成元 a_i により自由微分し, 各生成元を t に送ることによって得られる $n \times n$ 行列である. 行列 A は G の表示の仕方によるが, 初等イデアルの列

$$(0) = \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{O}_n = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

は表示の仕方によらない. ここで k 次初等イデアル \mathcal{O}_k は A の全ての $(n-k) \times (n-k)$ 小行列式により生成される $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ のイデアルとして定義する. G_K は welded equivalent に関する不変量であるので, これらのイデアルも同様に不変量である.

3.2 Alexander 多項式

以下, ホモロジー群は全て整数係数とする. 古典的結び目の場合, 前述の Alexander 加群は結び目の Seifert 曲面を用いて構成することができた. 具体的には, 古典的結び目 $K \subset S^3$ について補空間 $S^3 \setminus K$ を Seifert 曲面に沿って切り開き, 可算無限個のコピーを互いに貼り合わせて得られる無限巡回被覆 X_∞ の 1 次元ホモロジー群が Alexander 加群と一致する. また Seifert 曲面の 1 次元ホモロジー群から得られる Seifert 行列により, Alexander 加群の 1 次初等イデアルの生成元が表される. この生成元を **Alexander 多項式** という.

この結果は Seifert 曲面を持つ概古典的な仮想結び目に関しても拡張できる. 実際, 概古典的な仮想結び目に関して, その結び目群の 1 次初等イデアルは単項イデアルであることが示されているため Alexander 多項式が定義できる ([16, Theorem 1.2]). このことを説明するために必要な定義や命題を紹介する.

命題 3.1 ([3, Proposition 7.1]). K を $\Sigma \times I$ の内部に埋め込まれた結び目とする. このとき, 相対ホモロジー群 $H_1(\Sigma \times I \setminus K, \Sigma \times \{1\})$ は K のメリディアンで生成される無限巡回群である.

証明. $j: \Sigma \times \{1\} \rightarrow \Sigma \times I \setminus K$, および $i: \Sigma \times I \setminus K \rightarrow \Sigma \times I$ を包含写像, $p: \Sigma \times I \rightarrow \Sigma \times \{1\}$ を射影とする. このとき次の合成写像

$$\Sigma \times \{1\} \xrightarrow{j} \Sigma \times I \setminus K \xrightarrow{i} \Sigma \times I \xrightarrow{p} \Sigma \times \{1\}$$

は恒等写像であり, $j_*: H_*(\Sigma \times \{1\}) \rightarrow H_*(\Sigma \times I \setminus K)$ は retraction を持つ. よって, 対 $(\Sigma \times I \setminus K, \Sigma \times 1)$ に関する長完全系列から得られる完全系列

$$0 \rightarrow H_1(\Sigma \times \{1\}) \rightarrow H_1(\Sigma \times I \setminus K) \rightarrow H_1(\Sigma \times I \setminus K, \Sigma \times \{1\}) \rightarrow 0$$

は分裂し, $H_1(\Sigma \times I \setminus K) \cong H_1(\Sigma \times \{1\}) \oplus H_1(\Sigma \times I \setminus K, \Sigma \times \{1\})$ が成り立つ.

$N(K)$ を K の閉な正則近傍とする. $\Sigma \times I = (\Sigma \times I \setminus K) \cup \text{int}(N(K))$ に対し, Mayer–Vietoris 完全系列を適用する.

$$0 \rightarrow H_1(\partial N(K)) \rightarrow H_1(\Sigma \times I \setminus K) \oplus H_1(K) \rightarrow H_1(\Sigma \times I) \rightarrow 0$$

ここで $H_1(\partial N(K)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は K のメリディアンとロンジチュードで生成され, ロンジチュードの因子は $H_1(K)$ に同型に写される. よって $H_1(\Sigma \times I \setminus K)$ の直和分解と合わせて結論が得られる. \square

以上より, 有向仮想結び目 K は $H_1(\Sigma \times I \setminus J, \Sigma \times \{1\})$ において, ホモロジー類 $[K] = m\mu$ を決定する. この一意な整数 m を絡み数 $lk(J, K)$ と定義する. これは K が J をメリディアン方向に何回転しているかを表しており, その意味で古典的な絡み数の自然な拡張とみなせる. ここで絡み数は対称的でない, すなわち一般には $lk(J, K) \neq lk(K, J)$ であることに注意する.

例 3.2. 図 16 の曲面内の絡み目は, $lk(L_1, L_2) = -1$, $lk(L_2, L_1) = 0$ となる.

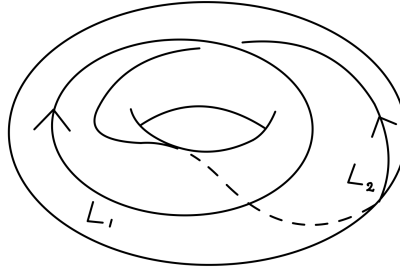


図 16: 絡み数が非対象となる例

Alexander 加群の構成は古典的な場合と同様の議論を, Σ に関するホモロジー群や基本群の元を無視するために商空間で置き換えて考えることで得られる.

F を $\Sigma \times I$ の内部に埋め込まれた, コンパクトかつ連結で向き付けられた種数 g , 境界成分 $n(> 0)$ の曲面とする. ホモロジー群 $H_1(\Sigma \times I \setminus F, \Sigma \times \{1\})$ と $H_1(F)$ は同型であり, とともに階数 $2g + n - 1$ の自由加群である. さらに $\Sigma \times I \setminus F, F$ 内の任意の向き付けられた閉曲線 c, d に関して $\beta([c], [d]) = lk(c, d)$ で定まる一意な非特異な双線形形式

$$\beta: H_1(\Sigma \times I \setminus F, \Sigma \times 1) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が存在する. これは [15, Theorem 6.3] の自然な拡張として示される.

F を $\Sigma \times I$ の内部に埋め込まれたホモロジカルに自明な成分数 n の有向絡み目 L に関する連結な Seifert 曲面とする. この曲面 F に対し, 閉正則近傍 $N(F)$ を $F \times [-1, 1] \cong N(F)$ でパラメータ付けされ, $F \times \{0\}$ が F に対応し, L の各成分のメリディアンが $F \times \{-1\}$ から入り, $F \times \{1\}$ から出るものとする. $\iota^\pm: F \rightarrow \Sigma \times I \setminus F$ を $\iota^\pm(x) = (x, \pm 1)$ で与えられる埋め込みとし, x の正負の push-off をそれぞれ $x^\pm = \iota^\pm(x)$ で表す. このとき, $\alpha^\pm(x, y) = \beta(x^\pm, y)$ で定まる 2 つの双線形形式,

$$\alpha^+, \alpha^-: H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が得られる. これを F の **Seifert 形式** という.

$Z = (\Sigma \times I \setminus L) / \Sigma \times \{1\}$ を $\Sigma \times I \setminus L$ 内の $\Sigma \times \{1\}$ を 1 点につぶして得られる空間とする. このとき Z の基本群は G_L と同型である. G_L の可換化は $H_1(G_L) \cong H_1(Z) \cong H_1(\Sigma \times I \setminus L, \Sigma \times \{1\}) \cong \mathbb{Z}^n$ となる. $\varepsilon: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ を準同型 $\varepsilon(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$ とし, Z_∞ を準同型 $G_L \rightarrow H_1(G_L) \cong \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ に対応する被覆空間とする. Z_∞ のモデルは, Seifert 曲面 F とパラメータ $F \times [-1, 1] \cong N(F)$ を用いて次のように構成される. $X = (\Sigma \times I \setminus \text{int}(N(F))) / \Sigma \times \{1\}$ とする. このとき X は有限 CW 複体であり, $H_1(X) \cong H_1(\Sigma \times I \setminus F, \Sigma \times \{1\})$ が成り立つ. Y を X を F に沿って切り開いて得られる空間とする, すなわち Y は $X \setminus F$ の 2 つの F のコピー $\iota^-(F)$ と $\iota^+(F)$ をコンパクト化して得られる空間である. (Y は F の開近傍 $F \times (-1, 1)$ を除いて X と同相.) $\phi: \iota^-(F) \rightarrow \iota^+(F)$ を ι^\pm で定まる同相写像とする. (X は $\iota^-(F)$ と $\iota^+(F)$ を ϕ で同一視することで復元できる.) 各整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $Y_i = Y \times \{i\}$ とする, また X_∞ を $\bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}} Y_i$ から $F_i^- = \iota^-(F) \times \{i\}$ と $F_{i+1}^+ = \iota^+(F) \times \{i+1\}$ を ϕ で同一視して Y_i と Y_{i+1} どうしを貼り合わせて得られる空間とする. このとき X_∞ は無限巡回被覆 Z_∞ と同相であり, $t(y, i) = (y, i+1)$ で与えられる同相写像 $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ は同型 $t: H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X_\infty)$ を誘導し, これを $H_1(X_\infty)$ 上の作用とみなすことで $H_1(X_\infty)$ に $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 加群の構造を与える. 以上の設定のもとで, [15, Theorem 6.5] は次の定理に拡張される.

定理 3.3 ([3, Theorem 7.2]). F を $\Sigma \times I$ の内部に埋め込まれたホモロジカルに自明な有向絡み目 L に関する連結な Seifert 曲面とする. 与えられた $H_1(F)$ の基底に関する Seifert 形式 α^\pm の行列表示を V^\pm とする. このとき $tV^- - V^+$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 加群 $H_1(X_\infty)$ の表現行列である.

系 3.4 ([3, Corollary 7.3]). 概古典的な有向仮想結び目, または絡み目の 1 次初等イデアルは単項イデアルであり, $\det(tV^- - V^+)$ で生成される. したがって単元倍を除いて $\Delta_L(t)$ は $\det(tV^- - V^+)$ と一致する.

定理 3.5 ([10, Lemma 3]). K_+, K_-, K_0 を図 17 で示される 1 つの交差の小さい近傍を除いて一致する 3 つの有向仮想結び目図式とする. これらの図式の内 1 つが Alexander numberable であると仮定する. (このとき自動的に残りの 2 つも Alexander numberable となる.) 各 $\Delta_{K_+}(t), \Delta_{K_-}(t), \Delta_{K_0}(t)$ は $\pm t^i$ 倍の差を除いて well-defined であるが, 全ての図式に対し, 交差の周りを除いて同じ Seifert 曲面を用いることで得られる Seifert 行列をそれぞれ $V_+^\pm, V_-^\pm, V_0^\pm$ とする. これらを用いて Alexander 多項式を, $\Delta_{K_+}(t) = \det(tV_+^- - V_+^+), \Delta_{K_-}(t) = \det(tV_-^- - V_-^+), \Delta_{K_0}(t) = \det(tV_0^- - V_0^+)$ として計算すると, これらの Alexander 多項式はスケイン関係式

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (1 - t)\Delta_{K_0}(t)$$

を満たす.

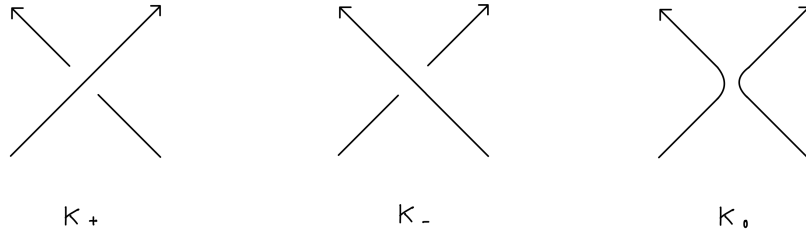


図 17: skein triple

証明. K_+, K_-, K_0 に関する Seifert 曲面で交差の周りで図 18 のようになっているものを F_+, F_-, F_0 とする. ここで F_+, F_- はそれぞれ F_0 に半ひねりバンドを付け加えたものとみることができる.

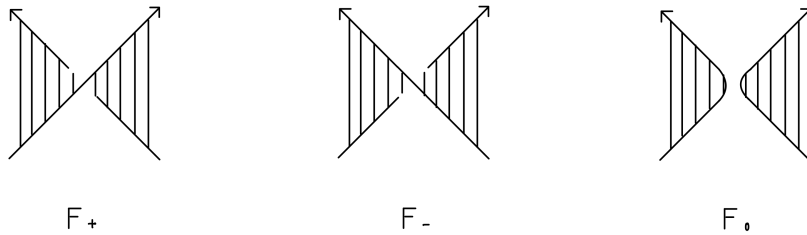


図 18: skein triple に対応する Seifert 曲面

$H_1(F_+)$ の基底でこのバンドを通過するものが存在しない場合, L_0 は非連結

であり L_+, L_- は一致する. よって $\Delta_{L_0}(t) = 0$ であり, $\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = 0 = (1-t)\Delta_{L_0}(t)$ が成り立つ.

次に $H_1(F_+)$ の基底でバンドを通過するものが存在する場合, このバンドを通過する基底がただ 1 つとなるよう基底を選びなおし, この基底を α とする. このとき F_0 に対応する Seifert 行列を V_0^\pm とすると,

$$V_+^\pm = \left(\begin{array}{c|c} a & {}^t\mathbf{x}^\pm \\ \hline \mathbf{y}^\pm & V_0^\pm \end{array} \right), \quad V_-^\pm = \left(\begin{array}{c|c} a+1 & {}^t\mathbf{x}^\pm \\ \hline \mathbf{y}^\pm & V_0^\pm \end{array} \right)$$

となる. これらを用いて $\Delta_{L_-}(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \Delta_{L_-}(t) &= \det \left(\begin{array}{c|c} (t-1)(a+1) & {}^t\mathbf{x}^- - {}^t\mathbf{x}^+ \\ \hline t\mathbf{y}^- - \mathbf{y}^+ & tV_0^- - V_0^+ \end{array} \right) \\ &= \det \left(\begin{array}{c|c} (t-1)a & {}^t\mathbf{x}^- - {}^t\mathbf{x}^+ \\ \hline t\mathbf{y}^- - \mathbf{y}^+ & tV_0^- - V_0^+ \end{array} \right) + \det \left(\begin{array}{c|c} t-1 & 0 \\ \hline t\mathbf{y}^- - \mathbf{y}^+ & tV_0^- - V_0^+ \end{array} \right) \\ &= \Delta_{L_+}(t) + (t-1)\Delta_{L_0}(t) \end{aligned}$$

となり主張が成り立つ. □

3.3 チェッカーボード彩色可能な仮想絡み目の determinant

古典的絡み目に関して, Alexander 加群の表現行列は, Fox-Jacobian 行列 (結び目群の関係子を各生成元で自由微分し, 得られた元の各生成元を t に送ったものを成分とする行列) として結び目群から直接求めることができた. これは仮想絡み目に対しても拡張できるが, 一般の仮想絡み目について 1 次初等イデアルは単項イデアルとならない. よって Alexander 多項式は定義できないが, その表現行列に $t = -1$ を代入して得られる行列の $(n-1) \times (n-1)$ 小行列式の絶対値として考えられる determinant は概古典的より弱い条件, mod 2 概古典的 (チェッカーボード彩色可能) を満たす絡み目に関して well-defined となる.

L をチェッカーボード彩色可能な図式 D で表される有向仮想絡み目とする. また D は n 個の実交点 $\{c_1, \dots, c_n\}$, m 個の long arc (実交差の下交点から出て, 上交点と仮想交点を通過し, 次の下交点に入る図式 D の arc) $\{a_1, \dots, a_m\}$ を持つ. D が k 個の連結成分を持つとき, $m = n + k - 1$ が成り立つ.

$n \times m$ 彩色行列 $B(D)$ を, (i, j) 成分を次のように与えて定義する.

$$b_{ij}(D) = \begin{cases} 2, & \text{if } a_j \text{ is the over-crossing arc at } c_i, \\ -1, & \text{if } a_j \text{ is one of the under-crossing arcs at } c_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

a_j が c_i の over-crossing arc かつ under-crossing arc である場合, $b_{ij}(D) = 1$ とする. この行列 $B(D)$ は, Fox-Jacobian 行列 $A(D)$ に $t = -1$ を代入したものとして得られる. よって, $B(D)$ の各行の和は 0 となる.

このとき, 次の命題が成り立つため, チェッカーボード彩色可能な絡み目に対して determinant は well-defined であることがわかる.

命題 3.6 ([4, Proposition 3.1]). $B(D)$ の任意の 2 つの $(n-1) \times (n-1)$ 小行列式は, 符号の差を除いて等しい. この小行列式の絶対値はチェッカーボード彩色可能な図式 D の選び方によらない. よって, チェッカーボード彩色可能な絡み目 L の不変量が定まる. これを L の determinant といい, $\det(L)$ で表す.

命題 3.7 ([4, Proposition 4.1]). 概古典的な絡み目 L に対して, $\det(L) = |\Delta_L(-1)|$ が成り立つ.

このことから, 概古典的な絡み目については, determinant は古典的な場合と同様に定義できる. また, チェッカーボード彩色可能な結び目 K について, $\det(K)$ は奇数となることが知られている.

4 Gauss diagram formula と Conway 多項式

本節では, [6] を参考に, 古典的結び目に関する不変量である Conway 多項式を Gauss diagram formula によって再解釈し, 仮想結び目への拡張を考える.

4.1 古典的結び目の Conway 多項式

定義 4.1. 有向古典的結び目図式 D の交差の部分集合 S について, S の交差を全て向きに沿ってスムージングして得られる曲線が 1 成分である場合, S は one-component という.

定義 4.2. 有向古典的結び目図式 D は基点を持ち, S を K の交差の one-component な部分集合とする. このとき K を S でスムージングして得られる曲線を基点から辿るとスムージング下交差の近傍をそれぞれ 2 回通過する. その過程でそれらの交差に対し, 先に K の下 (上) パスの方から近傍に接近し, 上 (下) パスの方から帰ってくる場合に, S は ascending (descending) であるという.

基点付き古典的結び目図式 D に対し, ascending 多項式を

$$\nabla_{\text{asc}}(D)(z) := \sum_{\substack{S: \text{ ascending} \\ \text{one-component}}} \left(\prod_{\times \in S} \text{wr}(\times) \right) z^{|S|}$$

と定める.

古典的結び目に関して, ascending 多項式は Conway 多項式と一致する.

また同様にして descending 多項式 $\nabla_{\text{dsc}}(K)$ を考えることができる. 古典的結び目に関して, ascending 多項式と descending 多項式は基点の選び方によらず, また両者は一致する (どちらも Conway 多項式と一致する) ことが分かる.

4.2 Gauss diagram formula による Conway 多項式の再解釈

定義 4.3. コードに向きをつけた基点付きコード図式を **arrow diagram** という.

以下, Gauss diagram, および arrow diagram の円周はいずれも反時計回りに向き付けられているとする.

定義 4.4. A を arrow diagram, G を Gauss diagram (両方とも基点付き) とする. このとき A から G への準同型 φ は A の円周から G の円周への向きを保つ同相写像であり, A の基点を G の基点に写し A のコードから G のコードへの, コードの向きを保つ単射を誘導するもののことをいう.

定義 4.5. arrow diagram A と基点付き Gauss diagram G に対して

$$\langle A, G \rangle := \sum_{\varphi \in \text{Hom}(A, G)} \prod_{c: \text{chord in } A} \text{sign}(\varphi(c)) \in \mathbb{Z}$$

を定める.

定義 4.6. コード図式 D の各コードを平行に二重化すると k 成分の曲線が得られるとき, D を k -component といい, $|D| = k$ で表す.

定義 4.7. 基点付き one-component コード図式を次のルールに従って arrow diagram に変える. 基点からスタートして二重化したコードに沿って動く. この移動の途中, 各コードのコピーの両方を互い違いの向きで通過する. ここで各コードに対し最初 (後) に通過するコードの向きに対応する arrow を選ぶ. このようにして得られる arrow diagram を descending (ascending) arrow diagram という.

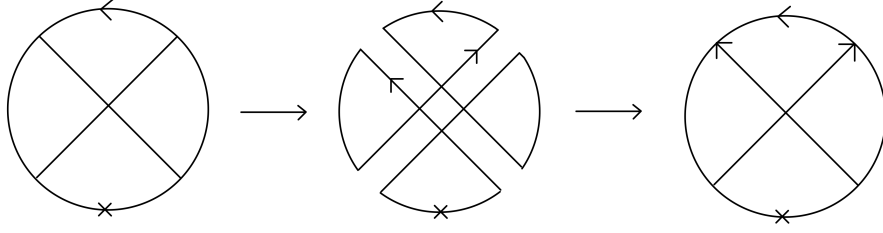
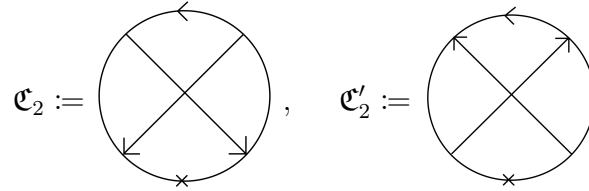


図 19: 基点付きコード図式から descending な arrow diagram の構成

定義 4.8. Conway combination $\mathfrak{C}_{2n}(\mathfrak{C}'_{2n})$ を $2n$ 本の arrow をもつ one-component ascending (descending) diagram の全ての総和と定める.

例 4.9.



これまで説明した one-component ascending (descending) な arrow diagram や Conway combination は, 2つの円周からなる arrow diagram についても自然に拡張できる.

例 4.10.



一般の基点付き仮想絡み目に関して, $\nabla_{\text{asc}}, \nabla_{\text{dsc}}$ は不変量となることが知られている ([17]).

以下の補題は古典的結び目に関するものであったが, 仮想結び目についても自然に拡張できる.

補題 4.11 ([6, Lemma 5.1]). K_+ をある 1つの正の実交差 c を区別した有向仮想結び目図式とする. また K_-, K_0 を Conway skein relation に従って, 交差 c を変形して得られる結び目, または c をスムージングして得られる 2 成分絡み目とする. ここで簡単のため $G_+ := G_{K_+}, G_- := G_{K_-}, G_0 := G_{K_0}$ とする. このとき,

$$\langle \mathfrak{C}_{2n}, G_+ \rangle - \langle \mathfrak{C}_{2n}, G_- \rangle = \langle \mathfrak{C}_{2n-1}, G_0 \rangle \quad (2)$$

が成り立つ.

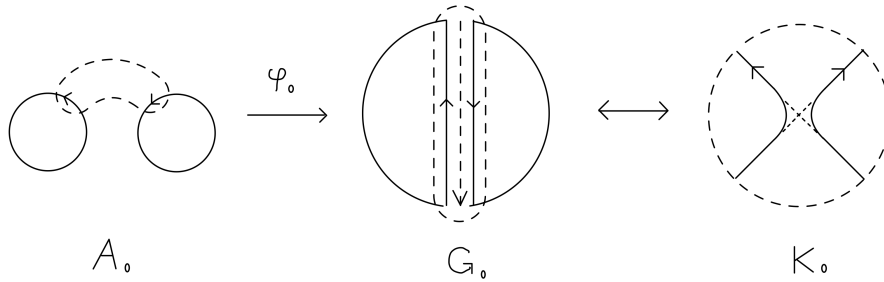
証明. A を \mathfrak{C}_{2n} の arrow diagram の一つとする. また c に対応する G_+ の arrow を c とする. $\varphi_+ \in \text{Hom}(A, G_+)$ が $c \notin \text{Im}\varphi_+$ をみたす準同型である場合, この準同型は $\text{Hom}(A, G_-)$ にも同様に含まれる. また, これらは左辺において打ち消しあう. 次に, ある arrow $a \in A$ に関して $\varphi_+(a) = c$ が成り立つと仮定する. このとき 2 円周の one-component ascending arrow diagram A_a と準同型 $\varphi_a \in \text{Hom}(A_a, G_0)$ を構成できる. この準同型は $\langle \mathfrak{C}_{2n-1}, G_0 \rangle$ に対し φ_+ と同じだけ寄与する. つまり,

$$\prod_{l: \text{chord in } A} \text{sign}(\varphi_+(l)) = \prod_{l: \text{chord in } A_a} \text{sign}(\varphi_a(l)). \quad (3)$$

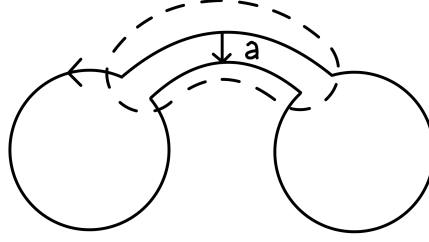
arrow diagram A_a は A のコード a を二重化して得られる図式. これは 2 つの円周からなり, 明らかに one-component かつ ascending である. ここで結び目 K_0 の Gauss diagram G_0 は, G_+ の c に対応する arrow を二重化して得られる. よって a を c に送る任意の準同型 $\varphi_+: A \rightarrow G_+$ は, a 以外の arrow を G_0 の同じ arrow に送る準同型 $\varphi_a: A_a \rightarrow G_0$ を誘導する. このとき $\text{sign}(\varphi_+(a)) = \text{sign}(c) = 1$ より式 (3) は明らかに成り立つ.

これと同様に, a を c に送る準同型 $\varphi_-: A \rightarrow G_-$ は準同型 $\varphi_a: A_a \rightarrow G_0$ を誘導する. ここで $\text{sign}(\varphi_-(a)) = \text{sign}(c) = -1$ より, 式 (3) の左辺と右辺は符号が異なる. 一方で, 式 (2) において $\varphi_- \in \text{Hom}(A, G_-)$ は $\langle \mathfrak{C}_{2n}, G_- \rangle$ の一部として負の符号を伴う. よって φ_- の左辺への寄与と φ_a の右辺への寄与は同じである.

以上とは逆に, $\langle \mathfrak{C}_{2n-1}, G_0 \rangle$ の 2 円周 arrow diagram A_0 に関する, 任意の準同型 $\varphi_0: A_0 \rightarrow G_0$ に対して, 式 (2) の左辺に右辺の φ_0 と同様の寄与をする φ_+ または φ_- を構成できる. 実際, φ_0 は A_0 の異なる 2 円周上の 2 つの弧を, K_0 の交差 c の付近の 2 つの弧に対応する G_0 の 2 つの弧に写す.



これらの弧をバンドでつなぐことで A_0 の 2 円周の連結和をとる. これは 1 円周の arrow diagram となる. ここで, 2 円周をつないだバンドを横切るコード a を配置し, 図式が ascending となるように向きをつける.



このときバンドは, 結び目図式において K_0 の 2 成分をつなぐ半ひねりバンドに対応し, K_+ または K_- (a の向きによる) が得られる. また得られた K_+, K_- により a の符号は決定される. よって one-component かつ ascending な arrow diagram A と, 対応する準同型 φ_+ または φ_- が得られた. この φ_{\pm} に対する φ_a は φ_0 と一致する. よって φ_{\pm} は, 式 (2) において φ_0 と同じ寄与をする.

以上より, \mathfrak{C}_{2n} の arrow diagram から G_{\pm} への準同型で a を c に送るものと \mathfrak{C}_{2n-1} の arrow diagram から G_0 への準同型は一対一に対応し, 符号を含めると式 (2) において, それぞれ両辺に同じだけの寄与をする. よって補題は示された. \square

また, この補題と類似した主張が 2 成分の絡み目に対しても成り立つ.

補題 4.12. L_+, L_-, L_0 を交差 c に関して Conway skein relation を満たす 3 つの有向仮想絡み目図式とする. また, G_+, G_-, G_0 をそれらの Gauss diagram とする. ここで, L_+, L_- は 2 成分絡み目とし, 交差 c をなすひもは互いに異なる成分に属しているとする. このとき L_0 は結び目図式であり,

$$\langle \mathfrak{C}_{2n+1}, G_+ \rangle - \langle \mathfrak{C}_{2n+1}, G_- \rangle = \langle \mathfrak{C}_{2n}, G_0 \rangle$$

が成り立つ.

証明. 補題 4.11 と同様. \square

ここで新たに, 基点付き Gauss diagram G について, G が 1 成分の場合,

$$\nabla_{\text{asc}}(G)(z) := \sum_{i \geq 0} \langle \mathfrak{C}_{2i}, G \rangle z^{2i}$$

G が 2 成分の場合,

$$\nabla_{\text{asc}}(G)(z) := \sum_{i \geq 0} \langle \mathfrak{C}_{2i+1}, G \rangle z^{2i+1}$$

と定義しなおす. descending 多項式についても \mathcal{D} を \mathcal{D}' に置き換えて同様に定義する. 補題 4.11, 4.12 より, これらの多項式はスケイン関係式を満たすことが容易にわかる.

また, 古典的結び目に関して, これらは前述の ascending, descending 多項式と一致し, したがって基点の選び方によらず Conway 多項式と一致する. 一方で, 一般の仮想結び目に関しては基点の選び方に依存し等号は成り立たない. しかし, 後述するように概古典的な結び目に限れば, 2 次の係数に関して等号が成り立つ.

4.3 descending な仮想結び目図式と warping degree

定義 4.13. D を基点付き有向結び目図式とする. この図式を基点から向きに沿って動いたとき, それぞれの実交点を, 最初に上交差, そのあとに下交差を通過するとき, D は **descending** という.

descending な図式は, 以下のような特徴を持つ.

命題 4.14 ([18, Proposition 2.2]). 任意の descending な図式は有限回の (r1), (v1)–(v4), (f1) move により自明な結び目にできる.

基点付き有向結び目図式の交差の情報を表す値として warping degree というものが古典的結び目図式に対して定義される ([19]). この定義を, 仮想結び目図式に次のように拡張して用いる.

定義 4.15. D を基点付き有向結び目図式とする. また, その基点を a とする. この図式を基点から向きに沿って動いたとき, 最初に下交差を, そのあと上交差を通過するような実交点を warping 交点という. また, D の warping 交点の数を **warping degree** といい, $d(D)$ で表す.

descending な基点付き有向結び目図式 D_a について, $d(D_a) = 0$ である.

また, Gauss diagram についても同様の拡張を考える.

定義 4.16. G を基点付き Gauss diagram とする. また, その基点を a とする. この図式を基点から向きに沿って動いたとき, 最初に arrowhead を, そのあと arrowtail を通過するような実交点を warping arrow という. また, G の warping arrow の数を **warping degree** といい, $d(G)$ で表す.

以下, 基点付き結び目図式 D , 基点付き Gauss diagram G について基点 a を明示するとき, それぞれ D_a, G_a と表わす.

5 主結果

補題 5.1. G を descending かつ概古典的な有向仮想結び目図式の Gauss diagram とする. また a を warping degree が 0 である G の基点とする. このとき, $n \geq 1$ について

$$\langle \mathfrak{C}_{2n}, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_{2n}, G_a \rangle = 0$$

が成り立つ.

証明. a の warping degree は 0 であるので, G_a の descending な subdiagram は 図 20 の形に限られる.

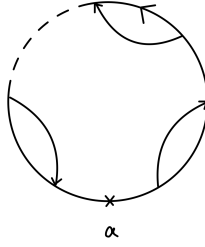


図 20: descending な subdiagram

これは明らかに one-component でない. よって, $n \geq 1$ に対して $\langle \mathfrak{C}'_{2n}, G_a \rangle = 0$. また $\langle \mathfrak{C}_{2n}, G_a \rangle = 0$ は明らか. \square

補題 5.2. G_a を概古典的な有向仮想結び目図式の基点付き Gauss diagram で次を満たすものとする: ある arrow a が存在し, a で Gauss diagram の円周を 2 分割した時に, a と交わる他の arrow が全て基点を含む方から出て, 基点を含まない方に入る.

L_a を G_a の arrow a をスムージングして得られる基点付き 2 成分 Gauss diagram とする. このとき, $n = 1$ について

$$\langle \mathfrak{C}_{2n-1}, L_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_{2n-1}, L_a \rangle = 0$$

また, $n \geq 2$ について

$$\langle \mathfrak{C}_{2n-1}, L_a \rangle = 0$$

が成り立つ.

証明. $n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{C}_1, L_a \rangle &= \langle \text{diagram with two circles, left circle has a self-loop and an arrow pointing right to the right circle, right circle has a self-loop}, L_a \rangle, \\ \langle \mathfrak{C}'_1, L_a \rangle &= \langle \text{diagram with two circles, left circle has a self-loop and an arrow pointing left to the right circle, right circle has a self-loop}, L_a \rangle\end{aligned}$$

である. よって, $\langle \mathfrak{C}_1, L_a \rangle, \langle \mathfrak{C}'_1, L_a \rangle$ はそれぞれ a を左 (右) に向かって横切る arrow の符号の和とみなせる. $\langle \mathfrak{C}_1, L_a \rangle = 0$ は明らか. また, 元の Gauss diagram G_a は概古典的であったので, a を左に向かって横切る arrow の符号の和と右に向かって横切る arrow の符号の和は等しい. よって, $\langle \mathfrak{C}'_1, L_a \rangle = \langle \mathfrak{C}_1, L_a \rangle = 0$.

$n \geq 2$ のとき, L_a の one-component な subdiagram は a を横切る必要があるが, そのような arrow は全て基点を含まない成分に入るので, ascending とならない. よって, $\langle \mathfrak{C}_{2n-1}, L_a \rangle = 0$. \square

補題 5.3. K を descending かつ概古典的な図式を持つ有向仮想結び目とする. このとき,

$$\Delta_K(t) \doteq 1$$

が成り立つ.

証明. 命題 4.14 より, descending な図式を持つ結び目は自明な結び目と welded equivalent である. ここで Alexander 多項式は welded equivalent に関する不変量であるので, $\Delta_K(t) \doteq \Delta_{\text{unknot}}(t) \doteq 1$ が成り立つ. \square

補題 5.4. $L = L_1 \cup L_2$ を 2 成分の概古典的有向仮想絡み目かつ, 一方の成分 L_1 が他方の成分 L_2 に対して, 上交差のみを持つ有向仮想絡み目図式 D を許容するとする. このとき, $\det(L) = 0$ が成り立つ.

証明. 図式 D について, 実交点を c_1, \dots, c_n とする. ここで, L_1 の自己交差を c_1, \dots, c_p , L_2 の自己交差を c_{p+1}, \dots, c_q , L_1, L_2 間の交差を c_{q+1}, \dots, c_n とラベル付けしなおす. また, long arc a_1, \dots, a_n を, L_1 に属するものを a_1, \dots, a_p , L_2 に属するものを a_{p+1}, \dots, a_n とする. ここで, L_1 の下交点は自己交差のみに限られるので, 自己交差の数と long arc の数は一致することに注意. このとき, 色

彩行列 $B(D)$ は次のようになる.

$$B(D) = \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & \dots & b_{1p} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{11} & \dots & b_{1p} & \\ \hline & B' & & B'' \end{array} \right)$$

ここで, $B(D)$ から n 行目と n 列目を除いたものを $B(D)_{n,n}$, B'' から $(n-p)$ 行目と $(n-p)$ 列目を除いたものを $B''_{n-p,n-p}$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(L) &= |\det B(D)_{n,n}| \\ &= |\det(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \det B''_{n-p,n-p}| \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 行列 $(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ は, L_1 を L_2 との交差を無視して結び目図式とみなしたときの図式 D_1 に関する色彩行列 $B(D_1)$ となる. 色彩行列の行ベクトル全体は線形従属であったので, $\det(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} = 0$ が成り立つ. よって, $\det(L) = 0$. \square

定理 5.5. K を概古典的な有向仮想結び目とする. K の Seifert 曲面を任意に選び, 得られる Seifert 行列を V^\pm とする. ここで, $\Delta_K(t) = \det(tV^- - V^+)$ とする. また, G_a を K の概古典的な結び目図式に対応する基点付き Gauss diagram とする. このとき,

$$\Delta_K(-1) \equiv \pm \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{8}$$

が成り立つ.

証明. 条件 $(*)_n$ を,

n 個の実交点を持つ概古典的結び目図式 D が表す概古典的結び目を K とする. ここで, K の Seifert 曲面を任意に選び, 得られる Seifert 行列を V^+, V^- とし, $\Delta_K(t) = \det(tV^- - V^+)$ とする. D に対応する Gauss diagram を G とし, 任意に基点 a をとると,

$$\Delta_K(-1) \equiv \pm \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{8}$$

が成り立ち, 加えて, $n+1$ 個の実交点を持つ概古典的結び目図式をスムージングして得られる 2 成分絡み目図式 D に対して, D が表

す絡み目を L とし, L の Seifert 曲面を任意に選び, 得られる Seifert 行列を V^\pm とし, $\Delta_L(t) = \det(tV^- - V^+)$ とする. また, D に対応する Gauss diagram を G とし, 任意に基点 a をとると,

$$\Delta_L(-1) \equiv \pm \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{4}$$

が成り立つ.

とする.

$(*)_n$ が任意の n について成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示す.

$n = 0$ の場合, 実交点を持たない結び目図式で表される結び目 K は自明な結び目であるので, $\Delta_K(t) \doteq 1$. よって, $\Delta_K(-1) = \pm 1$ が成り立つ. 一方で, 図式 D に対応する Gauss diagram G は arrow を持たないので, 任意の基点 a について, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(z) = 1$. よって, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) = 1$ が成り立つ. また, 1 個の実交点を持つ概古典的結び目図式をスムージングして得られる 2 成分絡み目図式 D で表される絡み目 L は自明な絡み目であるので, $\Delta_L(t) = 0$. よって, $\Delta_L(-1) = 0$ が成り立つ. 一方で, 図式 D に対応する Gauss diagram G は arrow を持たないので, 任意の基点 a について, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(z) = 0$. よって, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) = 0$ が成り立つ. 以上より, $(*)_0$ は成り立つ.

次に, $(*)_m$ が成り立つと仮定する.

このとき, まず $m+1$ 個の実交点を持つ概古典的結び目図式 D について D が表す概古典的結び目を K とし, K の Seifert 曲面を任意に選び, 得られる Seifert 行列を V^\pm とし, $\Delta_K(t) = \det(tV^- - V^+)$ とする. また, D に対応する Gauss diagram を G とし, G に任意に基点 a をとり, G_a の warping degree を d とすると,

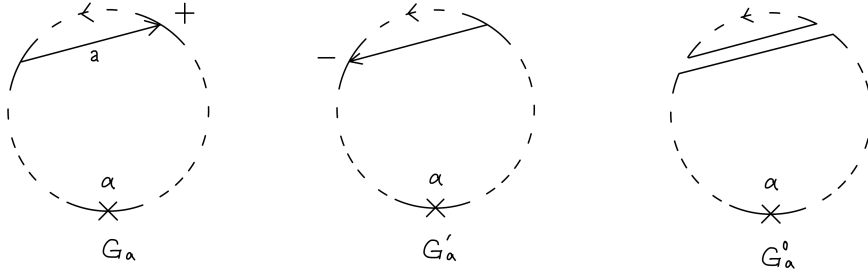
$$\Delta_K(-1) \equiv \pm \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{8} \quad (4)$$

が成り立つことを d に関する数学的帰納法により示す.

$d = 0$ の場合, 図式 D は descending なので, 補題 5.3 より, $\Delta_K(t) \doteq 1$. よって, $\Delta_K(-1) = \pm 1$ が成り立つ. 一方で, 補題 5.1 より, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(z) = 1$. よって, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) = 1$ が成り立つ.

次に $d = d'$ で成り立つと仮定する. ここで, $m+1$ 個の実交点を持つ概古典的結び目図式 D を任意にとり, D が表す概古典的結び目を K とし, D に対応する Gauss diagram を G とする. また G に任意に基点 a をとり, G_a の warping degree が $d' + 1$ の場合を考える. このとき, G_a の arrow で, 基点 a から向きに沿って動いたとき arrowhead を先に通過するものを一つ選び a とする. a の符号が正の場合, 図式 D の a に対応する交差の上下を入れ替えて得られる図式を D' , 交差をスムージングして得られる図式を D^0 とし, 図式 D', D^0 で表される

結び目と絡み目をそれぞれ K', K^0 とする. ここで, K の Seifert 曲面 F を任意にとり, 対応する Seifert 行列を V^\pm とする. 定理 3.5 と同様に K の Seifert 曲面 F をもとに K', K^0 の Seifert 曲面 F_-, F_0 を構成し, 対応する Seifert 行列を V_-^\pm, V_0^\pm とする. $\Delta_{K'}(t) = \det(tV_-^- - V_-^+)$, $\Delta_{K^0}(t) = \det(tV_0^- - V_0^+)$ とする. また, G_a の \mathfrak{a} の向きと符号を反転させて得られる Gauss diagram を G'_a , \mathfrak{a} をスムージングして得られる Gauss diagram を G_a^0 とする.



Alexander 多項式のスケイン関係式に $t = -1$ を代入すると

$$\Delta_K(-1) - \Delta_{K'}(-1) = 2\Delta_{K^0}(-1)$$

が得られる. ここで, G'_a の warping degree は d' であるので, 帰納法の仮定より,

$$\Delta_{K'}(-1) \equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) \pmod{8} \quad (\varepsilon' = \pm 1)$$

が成り立つ. また, K^0 は $m+1$ 個の実交点を持つ概古典的な結び目図式スムージングして得られる 2 成分の絡み目図式を持つので, $(*)_m$ より,

$$\Delta_{K^0}(-1) \equiv \varepsilon^0 \nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2) \pmod{4} \quad (\varepsilon^0 = \pm 1)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \Delta_K(-1) &= \Delta_{K'}(-1) + 2\Delta_{K^0}(-1) \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon^0 \nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2) \pmod{8} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon^0 \sum_{i \geq 1} \langle \mathfrak{C}_{2i-1}, G_a^0 \rangle \cdot 2^i \pmod{8} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 4\varepsilon^0 \langle \mathfrak{C}_1, G_a^0 \rangle \pmod{8} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 4\varepsilon' \langle \mathfrak{C}_1, G_a^0 \rangle \pmod{8} \\ &\equiv \varepsilon' (\nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2)) \pmod{8} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{8} \end{aligned}$$

が成り立つ. a の符号が負の場合についても同様のことが成り立つ. よって, 任意の d について式 (4) が成り立つことが示された.

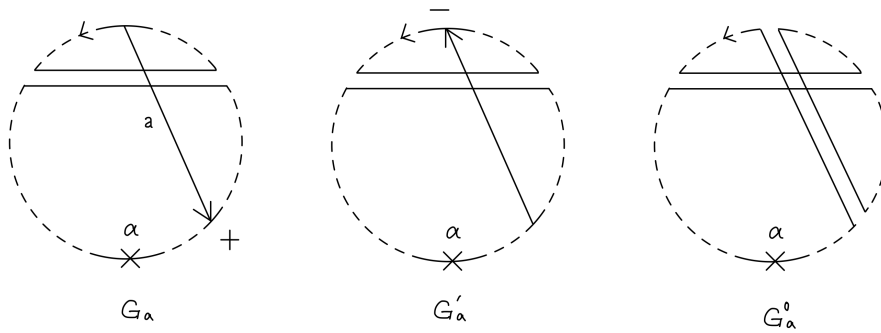
次に, $(*)_{n+1}$ の後半を示す. $m+2$ 個の実交点を持つ概古典的結び目図式をスムージングして得られる 2 成分絡み目図式 D に対して, D が表す絡み目を L する. L の Seifert 曲面を任意に選び, 得られる Seifert 行列を V^\pm とし, $\Delta_L(t) = \det(tV^- - V^+)$ とする. また, D に対応する Gauss diagram G とする. G に任意に基点 a をとり, G_a の arrow のうち基点を含まない成分から基点を含む成分に向かう arrow の数を k とする. このとき,

$$\Delta_L(-1) \equiv \pm \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{4} \quad (5)$$

が成り立つことを k に関する数学的帰納法により示す.

$k=0$ の場合, 図式 D は一方の成分が他方の成分に対して上交差のみを持つので, 補題 5.4 より, $\Delta_L(-1) = \det(L) = 0$ が成り立つ. 一方で, 補題 5.2 より, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(z) = 0$. よって, $\nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) = 0$ が成り立つ.

次に $k=k'$ で成り立つと仮定する. ここで, $m+2$ 個の実交点を持つ概古典的結び目図式を任意に取り, その任意の交差をスムージングして得られる 2 成分絡み目図式 D に対して, D が表す絡み目を L とし, D に対応する Gauss diagram を G とする. また G に任意に基点 a をとり, G_a の arrow のうち基点を含む成分から基点を含まない成分に向かう arrow の数が $k'+1$ の場合を考える. このとき, G_a の arrow で, 基点を含む成分から基点を含まない成分に向かうものを一つ選び a とする. a の符号が正の場合, 図式 D の a に対応する交差の上下を入れ替えて得られる図式を D' , 交差をスムージングして得られる図式を D^0 とし, 図式 D', D^0 で表される絡み目と結び目をそれぞれ L', L^0 とする. ここで, L の Seifert 曲面 F を任意にとり, 対応する Seifert 行列を V^\pm とする. 定理 3.5 と同様に K の Seifert 曲面 F をもとに L', L^0 の Seifert 曲面 F_-, F_0 を構成し, 対応する Seifert 行列を V_-^\pm, V_0^\pm とする. $\Delta'_L(t) = \det(tV_-^- - V_-^+)$, $\Delta_L^0(t) = \det(tV_0^- - V_0^+)$ とする. また, G_a の a の向きと符号を反転させて得られる Gauss diagram を G'_a , a をスムージングして得られる Gauss diagram を G_a^0 とする.



Alexander 多項式のスケイン関係式に $t = -1$ を代入すると

$$\Delta_L(-1) - \Delta_{L'}(-1) = 2\Delta_{L^0}(-1)$$

が得られる. ここで, G'_a の arrow のうち, 基点を含まない成分から基点を含む成分に向かう arrow の数は k' であるので, 帰納法の仮定より,

$$\Delta_{L'}(-1) \equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) \pmod{4} \quad (\varepsilon' = \pm 1)$$

が成り立つ. また, L^0 は m 個の実交点を持つ概古典的な結び目図式を持つので, 帰納法の仮定より,

$$\Delta_{L^0}(-1) \equiv \varepsilon^0 \nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2) \pmod{8} \quad (\varepsilon^0 = \pm 1)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} \Delta_L(-1) &= \Delta_{L'}(-1) + 2\Delta_{L^0}(-1) \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon^0 \nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2) \pmod{4} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon^0 \sum_{i \geq 0} \langle \mathfrak{C}_{2i}, G_a^0 \rangle \cdot 2^i \pmod{4} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon^0 \pmod{4} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\varepsilon' \pmod{4} \\ &\equiv \varepsilon' (\nabla_{\text{asc}}(G'_a)(2) + 2\nabla_{\text{asc}}(G_a^0)(2)) \pmod{4} \\ &\equiv \varepsilon' \nabla_{\text{asc}}(G_a)(2) \pmod{4} \end{aligned}$$

が成り立つ. a の符号が負の場合についても同様のことが成り立つ. よって, 任意の k について式 (5) が成り立つことが示された.

以上より, $(*)_{m+1}$ が示された. よって, 任意の n について $(*)_n$ が成り立つ. \square

定理 5.6. G_a を概古典的な有向仮想結び目図式に対応する基点付き Gauss diagram とする. また各 arrow の端点により Gauss diagram の円周をいくつかの領域に分割する. ここで基点 a を向きに沿って隣接する領域にシフトさせ, 得られる新しい基点を a' とする. このとき,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle &= \langle \mathfrak{C}_2, G_{a'} \rangle \\ \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle &= \langle \mathfrak{C}'_2, G_{a'} \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. シフトによって基点が通過した端点を持つ arrow を a とする. a から見て右に向かって交わる \pm コードの数を r_{\pm} , a から見て左に向かって交わる \pm コードの数を l_{\pm} とする. また a の符号を ε とする. このとき, 基点 a が通過した a の端点が arrowhead であった場合, a を基点として a は図 21 のように右に向かって交わる arrow と \mathfrak{C}_2 の arrow diagram をなすので, $\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle$ のうち, a を含む G_a の subdiagram による寄与は $\varepsilon(r_+ - r_-)$ である.

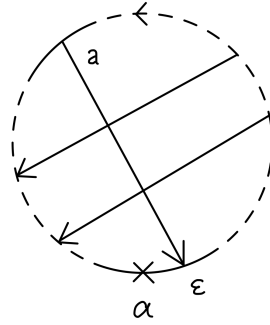


図 21: a を基点として a と \mathfrak{C}_2 の arrow diagram をなす arrow

一方で a' を基点として a は図 22 のように左に向かって交わる arrow と \mathfrak{C}_2 の arrow diagram をなすので, $\langle \mathfrak{C}_2, G_{a'} \rangle$ のうち, a を含む $G_{a'}$ の subdiagram による寄与は $\varepsilon(l_+ - l_-)$ である.

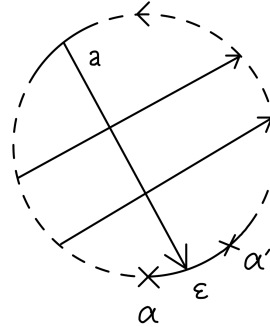


図 22: a' を基点として a と \mathfrak{C}_2 の arrow diagram をなす arrow

概古典的結び目図式の性質 (Proposition 2.4) より, いずれの場合でも a を含む subdiagram の寄与は一致する. 基点 a が通過した a の端点が arrowtail であった場合, a を含む \mathfrak{C}_2 の arrow diagram は, 基点 a, a' のいずれについても存在しないので a を含む $G_a, G_{a'}$ の subdiagram による寄与はどちらも 0 となる.

また, a を含まない subdiagram の寄与は, 基点のシフトの前後で変わらない. よって, $\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}_2, G_{a'} \rangle$ が成り立つ.

$\langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle, \langle \mathfrak{C}'_2, G_{a'} \rangle$ についても同様のことが示される. \square

定理 5.7. G を概古典的な有向仮想結び目図式に対応する Gauss diagram とする. また, G の円周上に任意に基点 a をとる. このとき,

$$\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle \quad (6)$$

が成り立つ.

証明. G_a の arrow の数 n に関する数学的帰納法を用いて示す.

$n = 0$ の場合, G_a は arrow を持たないので, $\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle = 0$.

次に $n = k$ の場合に成り立つと仮定する. このとき, $k + 1$ 本の arrow をもつ概古典的な結び目図式に対応する Gauss diagram, および任意に選んだ基点 a について, 式 (6) が成り立つことを, G_a の warping degree d に関する数学的帰納法を用いて示す.

$d = 0$ の場合, 補題 5.1 より, $\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle = 0$ が成り立つ. 次に $d = d'$ の場合に成り立つと仮定する. このとき, warping degree $d' + 1$ の Gauss diagram G_a に対して, 向きに沿って基点から G_a の円周を動いたとき, 先に arrowhead を通過するような arrow a を 1 つ選ぶ. G_a の a の向きと符合を反転させて得られる Gauss diagram を G'_a , a をスミージングして得られる Gauss diagram を G_a^0 とする. a の符号を ε とし, この arrow に対応する交差に関するスケイン関係式を変形すると以下を得る.

$$\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}_2, G'_a \rangle + \varepsilon \langle \mathfrak{C}_1, G_a^0 \rangle$$

ここで, 帰納法の仮定より, $\langle \mathfrak{C}_2, G'_a \rangle = \langle \mathfrak{C}'_2, G'_a \rangle$ が成り立つ. また, $\langle \mathfrak{C}_1, G_a^0 \rangle, \langle \mathfrak{C}'_1, G_a^0 \rangle$ はそれぞれ a から見て右 (左) に向かって交わる arrow の符号の和である. 元の結び目図式が概古典的であるのでこれらは一致する. よって,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle &= \langle \mathfrak{C}_2, G'_a \rangle + \varepsilon \langle \mathfrak{C}_1, G_a^0 \rangle \\ &= \langle \mathfrak{C}'_2, G'_a \rangle + \varepsilon \langle \mathfrak{C}'_1, G_a^0 \rangle \\ &= \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より, 任意の d および n について成り立つことが示された. \square

定理 5.6 より, $\langle \mathfrak{C}_2, \bullet \rangle, \langle \mathfrak{C}'_2, \bullet \rangle$ はそれぞれ基点によらないことがわかる. したがって, 概古典的な結び目 K , および K の任意の概古典的な結び目図式 D に対して, D を表す Gauss diagram に任意に基点 a をとり,

$$v_{2,1}(K) := \langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle, \quad v_{2,2}(K) := \langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle$$

とすると, $v_{2,1}, v_{2,2}$ は仮想結び目の virtual isotopy に関する不変量として well-defined である. また, 定理 5.7 より, 古典的な場合と同様に $v_{2,1} = v_{2,2}$ が成り立つことがわかる. よって,

$$v_2(K) := v_{2,1}(K) = v_{2,2}(K)$$

は古典的な場合の自然な拡張とみなせる.

このことと, 定理 5.5 を合わせて以下を得る.

系 5.8. K を概古典的な有向仮想結び目とする. このとき,

$$\det(K) \equiv \begin{cases} \pm 1 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 0 \pmod{2}) \\ \pm 3 \pmod{8}, & (v_2(K) \equiv 1 \pmod{2}) \end{cases}$$

が成り立つ.

以下に 5 交点以下の概古典的な結び目の $\det(K)$ と $v_2(K)$ を示す. ここで結び目の命名は Green's table [12] のものを用いた.

K	$\det(K)$	$v_2(K)$
3.6	3	1
4.9	3	-1
4.105	5	1
4.108	5	-1
5.2012	1	0
5.2025	1	0
5.2080	1	0
5.2133	3	-1
5.2160	3	1
5.2331	1	2
5.2426	9	2
5.2433	11	1
5.2437	7	2
5.2439	7	0
5.2445	5	3

6 考察と今後の展望

6.1 チェッカーボード彩色可能な結び目への拡張

今回示した結果の多くは, 条件を上手く調整すればチェッカーボード彩色可能な結び目についても成り立つことがいえる. 例えば, 補題 5.1 はチェッカーボード彩色可能な結び目図式に対応する Gauss diagram に対しても成り立つ. また, 補題 5.2 の等式は mod 2 で考えることで成り立つ. 補題 5.3, 5.4 についても証明がそのまま流用できる. よって, 色彩行列に関してスケイン関係式に準ずる関係が成り立てば, 定理 5.5 もまた成り立つことが予想される. 定理 5.6, 5.7 は mod 2 で成り立つことが証明を上手く調整することで示される. よって, $v_2(K) \bmod 2$ はチェッカーボード彩色可能な結び目の不変量として well-defined となる.

例 6.1. チェッカーボード彩色可能であるが概古典的でない仮想結び目の例として $K = 4.90$ が挙げられる. K は図 23 のチェッカーボード彩色可能な仮想結び目図式 D を持つ. また, 各実交点 c_1, \dots, c_4 , long arc a_1, \dots, a_4 を図 23 のようにラベル付けする.

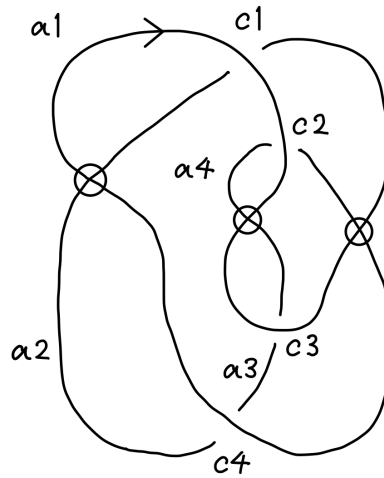


図 23: 4.90 のチェッカーボード彩色可能な仮想結び目図式

このとき色彩行列 $B(D)$ は

$$B(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. これを用いて determinant を計算すると $\det(K) = 1$ となる.

一方 D は図 24 で表される Gauss diagram G を持つ.

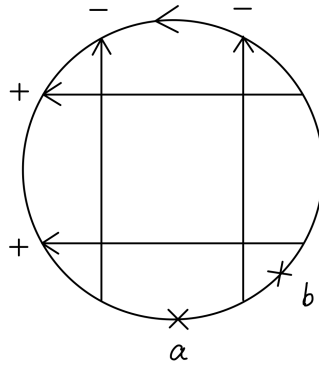


図 24: 4.90 の図式 D に対応する Gauss diagram

ここで, 基点 a, b について $\langle \mathfrak{C}_2, G_a \rangle = \langle \mathfrak{C}_2, G_b \rangle = 0$, $\langle \mathfrak{C}'_2, G_a \rangle = -2$, $\langle \mathfrak{C}'_2, G_b \rangle = -4$ と全て mod 2 で 0 となる. これらは主定理の結果と一致する.

注意. 概古典性の判定について次のことが成り立つ.

定理 ([3, Theorem 8.3]). 仮想結び目 K が mod p 概古典的であるとき, K の任意の最小交点図式は mod p Alexander numberable である.

よって, 仮想結び目 K が概古典的であるかを判定するには, 最小交点の図式について確認すれば十分である. 図 23 で示した図式は Green's table の最小交点のものであり, Alexander numberable でないので 4.90 は概古典的でないことがわかる.

6.2 directed Alexander 多項式との比較

本稿では, 古典的な Alexander 多項式の拡張として概古典的な仮想結び目に関する Alexander 多項式を定めた. これは概古典的結び目 K に対して, K の

Seifert 曲面 F と, そこから得られる Seifert 行列 V^+, V^- を用いて, $\Delta_K(t) = \det(tV^- - V^+)$ として計算されるのだった. 一方, この定義とは別に次のような拡張が Boden 等によって導入された ([2]).

$$\nabla_{K,F}^\pm(t) := \det(t^{\frac{1}{2}}V^\pm - t^{-\frac{1}{2}}(V^\pm)^\top)$$

これらを directed Alexander 多項式といい, 特に $\nabla_{K,F}^+(t)$ を up Alexander 多項式, $\nabla_{K,F}^-(t)$ を down Alexander 多項式という. これらの値は F の選び方に依存する. また, Alexander 多項式, 特に determinant に関連する重要な不変量として Arf 不変量が存在した. Arf 不変量は古典的な場合, Seifert 行列により表される 2 次形式から定まるのだった. Chrisman, Mukherjee はこれを概古典的結び目の V^+, V^- を用いて拡張した ([8]). ここで V^+, V^- から求まる Arf は一致することが示されている.

古典的結び目の Arf 不変量の重要な性質として, slice obstruction をなすというものがあつた. slice および concordance の概念は仮想結び目に対して拡張できる. Boden 等により導入された前述の Arf は virtual sliceness に関する obstruction をなす.

一方で, 古典的結び目の Arf 不変量の性質の一つとして, Conway 多項式の 2 次の係数 $v_2(K)$ と mod 2 で一致するというものがあつた. しかし, 本稿で拡張した $v_2(K) \bmod 2$ と Boden 等による Arf は一般には一致しない. よって, 概古典的結び目のレベルでは, slice obstruction としての Arf と $v_2(K) \bmod 2$ としての Arf は一致しないことがわかる.

例 6.2. $K = 6.87548$ とする. このとき K は図 25 のような Seifert 曲面 F を持つ ([7]). また, 図のように $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の基底を選び, 2 次形式 $q_{K,F}: H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $q_{K,F}(x) \equiv \ell k(x^+, x) \bmod 2$ で定める. このとき, $\text{Arf}(q_{K,F}) \equiv 1 \bmod 2$ となる.

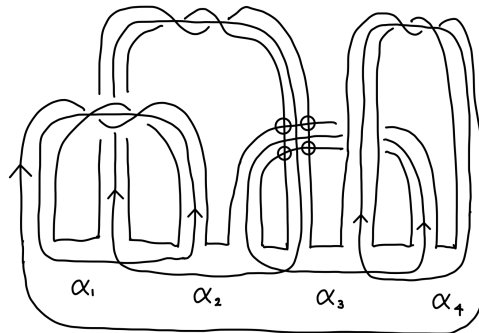


図 25: 6.87548 の Seifert surface

一方で, K の概古典的な結び目図式の Gauss diagram として図 26 のようなものが存在する. この Gauss diagram をもとに v_2 を計算すると $v_2(K) = -2$ となる.

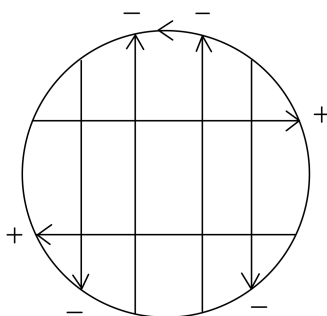


図 26: 6.87548 の Gauss diagram

参考文献

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306. MR1501429
- [2] H. U. Boden, M. Chrisman, and R. Gaudreau, *Signature and concordance of virtual knots*, Indiana Univ. Math. J. **69** (2020), no. 7, 2395–2459. MR4195608
- [3] H. U. Boden, R. Gaudreau, E. Harper, A. J. Nicas, and L. White, *Virtual knot groups and almost classical knots*, Fund. Math. **238** (2017), no. 2, 101–142. MR3640614
- [4] H. U. Boden and H. Karimi, *Classical results for alternating virtual links*, New York J. Math. **28** (2022), 1372–1398. MR4503982
- [5] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, 2002, pp. 311–322. Knots 2000 Korea, Vol. 1 (Yongpyong). MR1905687
- [6] S. Chmutov, M. C. Khoury, and A. Rossi, *Polyak-viro formulas for coefficients of the Conway polynomial*, J. Knot Theory Ramifications **18** (2009), no. 6, 773–783. MR2542695
- [7] M. Chrisman, *Virtual Seifert surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 6, 1950039, 33. MR3956355
- [8] M. Chrisman and S. Mukherjee, *Algebraic concordance order of almost classical knots*, J. Knot Theory Ramifications **32** (2023), no. 11, Paper No. 2350072. MR4683264
- [9] D. Cimasoni and V. Turaev, *A generalization of several classical invariants of links*, Osaka J. Math. **44** (2007), no. 3, 531–561. MR2360939
- [10] C. A. Giller, *A family of links and the Conway calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), no. 1, 75–109. MR642331

- [11] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), no. 5, 1045–1068. MR1763963
- [12] J. Green, *A table of virtual knots*, 2004. <https://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>.
- [13] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690. MR1721925
- [14] G. Kuperberg, *What is a virtual link?*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 587–591. MR1997331
- [15] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1472978
- [16] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, and Y. Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), no. 10, 1250095, 18. MR2949227
- [17] M. Polyak, *Alexander-Conway invariants of tangles* (2010), arXiv:1011.6200.
- [18] S. Satoh, *Crossing changes, delta moves and sharp moves on welded knots*, Rocky Mountain J. Math. **48** (2018), no. 3, 967–979. MR3841147
- [19] A. Shimizu, *The warping degree of a knot diagram*, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 7, 849–857. MR2673686
- [20] D. S. Silver and S. G. Williams, *Crowell’s derived group and twisted polynomials*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no. 8, 1079–1094. MR2275098