

ツインローターヘリコプターモデルの目標信号追従制御

—ローターの推力制限を考慮した方法—

和田 信 敬* 南 昌 行* 松 尾 祥 也* 佐 伯 正 美*

Tracking Control of a Twin-Rotor Helicopter Model with Actuator Constraints

Nobutaka Wada*, Masayuki Minami*, Yoshiya Matsuo* and Masami Saeki*

In this paper, we design a flight controller for a twin-rotor helicopter model with actuator constraints. The controller is composed of the state dependent gain-scheduled feedback control law and the reference management device which are adjusted optimally by on-line computation. We show that the control system with the proposed control law achieves higher tracking performance as compared to the system with the standard constant feedback control law through experimental results.

Key Words: Twin-rotor helicopter, Saturation, Gain-Scheduling, Reference Management, On-line Optimization

1. はじめに

航空機をはじめとする現実の機械システムで用いられているアクチュエータには、最大出力や変化率、移動範囲等に制約が存在する。これらの制約を無視してフィードバック制御系を設計すると、急激な目標値変更や過大な外乱が加わった際に、アクチュエータ出力が制約を越え、閉ループ系の不安定化や装置の破壊などが生じる場合がある。このような問題は、搭載するアクチュエータに厳しい重量制限のある、移動体の制御系において特に生じやすい[3][11]。この問題に対処する方法の一つに、想定されるあらゆる目標信号や外乱が加わった場合にも、アクチュエータが制限を破らないように、ローゲインの制御器を設計する方法が挙げられる。この方法で設計した制御器を用いると、目標入力の振幅が小さい場合には、小さな制御入力しか用いることが出来ず、制御性能は保守的なものとなる。一方、ハイゲインな制御器を用いると、目標入力が小さい場合には高い制御性能を達成できるが、大きな目標入力が加わった際にアクチュエータ出力が制限を越え易くなり、閉ループ系が不安定化する可能性が生じる。

この問題に対し、近年の急速な計算機パワーの増大を背景として、実時間最適化に基づく新たな制御器の構成法が示されている[2][13][14]。その一つに、状態依存可変ゲイン制御がある[13][14]。状態依存可変ゲイン制御では、状態空間の原点近傍でハイゲイン、原点から遠ざかるに従い滑らかにローゲインとなる制御器を設計しておき、毎時刻、出来るだけ高い制御性能

が得られるようにゲインの更新が行われる。この方法を用いると、広い漸近安定領域と原点近傍での高い制御性能を両立させることが可能となる。この手法は、目標信号追従制御問題に対して拡張されている[15]。しかしながら、これらの手法の有効性は低次数の線形システムに関する数値例題で確認されているのみであり、実機検証は行われていない。実機では、制御系設計時に無視した外乱や制御対象の非線形性、モデル化誤差、計算機の演算遅れが存在し、これらは制御性能に深刻な悪影響を及ぼす可能性がある。したがって、文献[13]~[15]の手法の有効性を、数値的のみならず、実機を用いて検証することは、これらの手法を実用化する上で有意義であると考えられる。

そこで、本稿では、ツインローター浮上系 (Fig. 1 参照)[9]の飛行制御系を、文献[15]の手法に基づいて設計し、その有効性を実験的に検証する。ツインローター浮上系実験装置は、ヘリコプターや垂直離着陸機と類似したダイナミクスを持ち、より一般的な航空機[10]に対する制御系設計法を構築する上で基礎となる制御対象である。この実験装置は、非線形性の強いダイナミクスを持ち、多入力系であることから一般に制御困難な対象であると言える。また、不安定系であることから、ある程度短いサンプル周期で制御を実行する必要があり、実時間最適化が要求される提案制御手法の実用性を検証するのに適していると言える。本稿では、このツインローター浮上系に対して、ローターの推力制限の下で、上下方向および姿勢を安定化し、かつ、横方向の速度を目標信号に素早く追従させる飛行制御器を設計し、その有効性を実験的に検証する。

記号: ある正定対角行列 $A = \text{diag}[a_1, \dots, a_m]$ およびベクトル $u \in \mathcal{R}^m$ について、多変数飽和関数を $\Phi_A(u) := (\phi_{a_1}(u_1), \dots, \phi_{a_m}(u_m))^T$ で定義する。ただし、 $\phi_{a_i}(u_i) :=$

原稿受付 2000年5月22日

*広島大学

*Hiroshima University

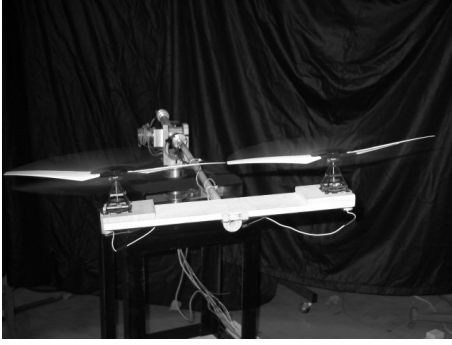


Fig. 1 Twin-rotor helicopter model

$\text{sgn}(u_i)\min\{|u_i|, a_i\}$ であり, $A = I$ のとき, 添え字を省略する. $v \in \mathcal{R}^n$ について, そのユークリッドノルムを $\|v\|_2 := (v^T v)^{1/2}$ で表す. 正定対称行列 $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ について, 楕円集合 $\mathcal{E}(P, \eta) := \{x \in \mathcal{R}^n : x^T P x \leq \eta\}$ を定義する. 行列 $F \in \mathcal{R}^{m \times n}$ の第 i 行を $F^{(i)}$ と表す. さらに, 集合 $\mathcal{L}(F, \rho) := \{x \in \mathcal{R}^n : |F^{(l)} x| \leq \rho_l, l = 1, \dots, m\}$ を定義する. ただし, $\rho = \text{diag}[\rho_1, \dots, \rho_m]$ である. \mathcal{V} は, 要素が 1 か 0 の $m \times m$ 次対角行列の集合を表す. 明らかに, \mathcal{V} は 2^m の要素を持つ. \mathcal{V} の各要素を $\mathbf{E}_j, j = 1, 2, \dots, 2^m$ と表す. また, $\mathbf{E}_j^- := I - \mathbf{E}_j$ を定義する. 明らかに, \mathbf{E}_j^- は \mathcal{V} の要素である.

2. 入力拘束システムの追従制御

本節では, 入力拘束システムに対する目標信号追従制御則の構成法 [15] について説明する.

2.1 問題設定

以下のシステムについて考える.

$$x(t+1) = Ax(t) + B\Phi(u(t)) + Ew(t) \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t) + D\Phi(u(t)) + D_w w(t) \quad (2)$$

ただし, $x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, w \in \mathcal{R}^p, z \in \mathcal{R}^q$ である. ここでは, $w(t)$ は目標信号, $z(t)$ は追従誤差を表すものとする (例えば, 制御量が $y(t) = C_y x(t)$ で与えられている場合, 追従誤差は $z(t) = w(t) - y(t)$ となる).

はじめに, 第 2.2 節では, 以下の問題について考える.

問題 1 システム (1), (2) について考える. 信号 $w(t)$ は次式により算出されるものとする.

$$r(t+1) = Sr(t) \quad (3)$$

$$w(t) = r(t) \quad (4)$$

ただし, 行列 S は複素平面の単位円上に固有値持つものとする (行列 S の選択により, w はステップ状信号や周期的信号となる). このとき, 広い漸近安定領域と, $z(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ を達成するフィードバック制御則 $u(t) = F(t)x(t) + M(t)w(t)$ を設計せよ.

第 2.2 節では, 状態依存可変ゲイン制御則に基づく問題 1 に対する解を示す. 状態依存可変ゲイン制御構造を採用することにより, 広い漸近安定領域と, 追従誤差の素早い収束の両立が可能となる. つぎに, 第 2.3 節では, 第 2.2 節の結果を基に,

目標信号 $r(t)$ が任意の時変信号である場合の制御則の構成法を示す.

2.2 外部ダイナミクスにより生成される目標信号への漸近的追従制御

2.2.1 制御器設計

はじめに, 可変ゲイン制御器設計に用いる定理を示す.

定理 1 システム (1)–(4) について考える. 次式を満たす行列 $\Pi \in \mathcal{R}^{n \times p}, \Gamma \in \mathcal{R}^{m \times p}$ が存在するものとする.

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + E \quad (5)$$

$$0 = C\Pi + D\Gamma + D_w \quad (6)$$

また, $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ であるものとする. さらに, ある正定数 η, γ_0, γ_1 ただし $\gamma_0 < \gamma_1$ および行列 $\mathbf{R} > 0$ について, 次式を満たす行列 $Q_i, Y_i, Z_i, (i = 0, 1)$ が存在するものとする.

$$\begin{bmatrix} Q_i & * & * \\ \begin{bmatrix} CQ_i \\ \mathbf{R}^{1/2} Y_i \end{bmatrix} + \mathbf{D}(\mathbf{E}_j Y_i + \mathbf{E}_j^- Z_i) & \gamma_i I & * \\ A Q_i + B(\mathbf{E}_j Y_i + \mathbf{E}_j^- Z_i) & 0 & Q_i \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i \in [0, 1], \forall j \in [1, 2^m] \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & * \\ Z_i^{(l)} & \frac{\rho_l^2}{\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in [0, 1], \forall l \in [1, m] \quad (8)$$

$$Q_0 < Q_1 \quad (9)$$

ただし, $\rho_l := 1 - \max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)|, \mathbf{D} := [D^T, 0]^T$ であり, * は行列不等式の対称な要素を表す. さらに, $\xi(0) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta)$ を満たす定数 $\alpha \in [0, 1]$ が存在するものとする. ただし, $P(\alpha) := Q(\alpha)^{-1}, Q(\alpha) := (1 - \alpha)Q_0 + \alpha Q_1, \xi := x - \Pi w$ である. このとき, フィードバック制御則

$$u(t) = F(\alpha)x(t) + M(\alpha)w(t) \quad (10)$$

ただし, $F(\alpha) = Y(\alpha)Q(\alpha)^{-1}, Y(\alpha) := (1 - \alpha)Y_0 + \alpha Y_1$ および $M(\alpha) = \Gamma - F(\alpha)\Pi$ をシステム (1)–(4) に適用すると, $\xi(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta), \forall t \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ および $J := \sum_{t=0}^{\infty} \|z(t)\|_2^2 < \gamma(\alpha)\eta$ が成立する. ただし, $z := [z^T, u_e^T \mathbf{R}^{1/2}]^T, u_e := u - \Gamma w, \gamma(\alpha) := (1 - \alpha)\gamma_0 + \alpha\gamma_1$ である.

証明 付録 B 参照. \square

本稿では, 定理 1 に基づき, 領域 $\mathcal{E}(P(1), \eta)$ を出来るだけ広げるゲイン $F(1) = Y_1 Q_1^{-1}$ および, 領域 $\mathcal{E}(P(0), \eta)$ 内で $z(t)$ の素早い収束を達成するゲイン $F(0) = Y_0 Q_0^{-1}$ を設計する. これは, パラメータ γ_0, γ_1 および \mathbf{R} を適切に設定することにより行う. そして, 得られたゲインを α で補間することにより, 制御則 (10) を構成する. なお, 定理 1 の条件 (7)–(9) は線形行列不等式 (LMI) 条件 [6] なので, 内点法等の数値的最適化手法により容易に解くことが可能である [6].

補足 1 式 (5) および (6) は, 線形システムが出力レギュレーションを達成するための条件を表す [12].

補足 2 全ての状態量に重みを課す場合には, 式 (7) の第 (2,1) 要

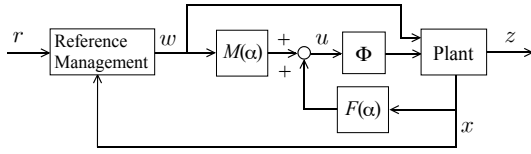


Fig. 2 Control System with a Reference Management Device

素の第一項を $[Q_i C^T, Y_i^T R^{1/2}, Q_i S^{1/2}]^T$ へ、さらに、 D を $D = [D, 0, 0]^T$ へ変更すればよい。ただし、 $S = S^T > 0$ は重み行列である。このとき、評価関数は $J = \sum_{t=0}^{\infty} \{\|z(t)\|_2^2 + \xi(t)^T S \xi(t)\}$ となり、全ての状態量に重みを課すことが可能となる。

2.2.2 制御アルゴリズム

定理 1 に基づき設計した制御器 (10) を用いた場合、 α が小さい程、コスト関数 J の上界は小さくなり、その結果、制御性能は高くなる。そこで、以下では、閉ループ系の内部安定性が保証され、かつ、毎時刻出来るだけ小さな α が選ばれる制御アルゴリズムを示す。

アルゴリズム 1

Step 0: Set $t = 0$.

Step 1: Measure $x(t)$ and $w(t)$.

Step 2: Solve $\min_{\alpha \in [0,1]} \alpha$, s.t. $\xi(t)^T Q(\alpha)^{-1} \xi(t) \leq \eta$.

Then, set $\alpha(t) = \alpha$.

Step 3: Apply $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ to the plant (1), (2).

Step 4: $t \leftarrow t + 1$ and go to Step 1.

Step 2 の最適化問題は LMI 問題なので、内点法により解くことが可能である。また、この問題は対称行列の固有値問題として解く事も可能である。以下、これについて説明する。Schur complement [6] より、 $\xi(t)^T Q(\alpha)^{-1} \xi(t) \leq \eta$ は $Q(\alpha) - \frac{1}{\eta} \xi(t) \xi(t)^T \geq 0$ と等価である。さらに、この条件は、 $\alpha I \geq Q(\xi(t))$ と書き換えることができる。ただし、 $Q(\xi(t)) := Q_h^{-1/2} \left[\frac{1}{\eta} \xi(t) \xi(t)^T - Q_0 \right] Q_h^{-1/2}$ および $Q_h := Q_1 - Q_0$ である。よって、 $\alpha \geq 0$ であることを考慮すると、Step 2 の最適化問題の解は、 $\alpha = \max[0, \lambda_{\max}(Q(\xi(t)))]$ により得られる。

2.2.3 可解性と追従性

アルゴリズム 1 の可解性および $z(t)$ の収束性について以下が成り立つ。

定理 2 システム (1), (2) について考える。式 (5) および (6) を満たす行列 Π と Γ が存在するものとする。 $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1$, $\forall l \in [1, m]$ が成り立つものとする。また、ある正定数 η, γ_0 および γ_1 について、式 (7)–(9) を満たす行列 Q_i, Y_i, Z_i が存在するものとする。さらに、 $\xi(0) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ であるものとする。このとき、アルゴリズム 1 をシステム (1), (2) に適用すると、 $t \rightarrow \infty$ のとき $z(t) \rightarrow 0$ が成り立つ。

証明 付録 C 参照。 □

2.3 任意の目標信号への追従制御

本節では、目標信号 $r(t)$ が任意の時変信号である場合の制御系構成法を示す。目標信号が任意の時変信号となる例として、フライ・バイ・ワイヤ方式の航空機等の、人が指令信号を機械システムに与える場合の制御問題 [1] [3] [4] [11] が挙げられる。この問題では、人が制御系に加える指令信号は、任意の時変目標信号と

なる。目標信号 $r(t)$ が任意の時変信号である場合、 $w(t) = r(t)$ としてアルゴリズム 1 を適用すると、 $z(t)$ の漸近的収束性だけでなく、アルゴリズムの可解性も保証されなくなる。そこで、本節では、前節の結果を基に、 $r(t)$ が任意の時変信号である場合にも適用可能な制御アルゴリズムの構成法を示す。ただし、目標信号が任意の時変信号である場合、 $z(t)$ の漸近的収束性を保証する制御則を構築することは一般に困難なので、ここでは、 $z(t)$ の振幅が毎時刻出来るだけ小さくなり、かつ、目標信号 $r(t)$ がある有限時刻以降一定となる場合、 $z(t)$ が 0 に収束する制御アルゴリズムを構築する。目標信号が一定である場合に $z(t)$ が 0 に収束することを保証するため、以下の仮定を設ける。

仮定 1 $S = I$ について、式 (5), (6) を満たす解として、適当なサイズの行列 Π および $\Gamma = 0$ が存在する。

上記の仮定が満たされる時、制御対象は積分特性を有する。さらに、以下を仮定する。

仮定 2 ある正定数 η, γ_0, γ_1 ただし $\gamma_0 < \gamma_1$ および行列 $R > 0$ について、式 (7)–(9) を満たす行列 Q_i, Y_i, Z_i が存在する。

これらの仮定を満たす行列を用い、制御則 (10) が設計されているものとする。

前述したように、 $w(t) = r(t)$ としてアルゴリズム 1 をシステムに適用すると、アルゴリズムの可解性は保証されなくなる。そこで、ここでは、アルゴリズムの可解性が保証される範囲内で、出来るだけ元の目標信号 $r(t)$ に近い値を持つ修正目標信号 $w(t)$ を算出し、これを制御に用いることにする (Fig. 2 参照)。以下に、目標信号修正アルゴリズムを含む制御アルゴリズムを示す。

アルゴリズム 2

Step 0: Set $t = 0$ and $\alpha(-1) = 1$.

Step 1: Measure $x(t)$ and $r(t)$.

Step 2: If $x(t) - \Pi r(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t-1)), \eta)$, then set $w(t) = r(t)$ and go to Step 4. Otherwise, go to Step 3.

Step 3: Solve $\min_{\tilde{w} \in \mathcal{R}^p} \|r(t) - \tilde{w}\|_2^2$, s.t.

$$\begin{bmatrix} \eta & * \\ x(t) - \Pi \tilde{w} & Q(\alpha(t-1)) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (11)$$

Then, set $\alpha(t) = \alpha(t-1)$, $w(t) = \tilde{w}$ and go to Step 5.

Step 4: Solve $\min_{\alpha \in [0,1]} \alpha$, s.t. $\xi(t)^T Q(\alpha)^{-1} \xi(t) \leq \eta$. Then, set $\alpha(t) = \alpha$.

Step 5: Apply $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ to the plant (1), (2).

Step 6: $t \leftarrow t + 1$ and go to Step 1.

上記のアルゴリズム 2 の Step 2 と Step 3 は、目標信号修正アルゴリズムを表す。Step 3 の最適化問題は、変数 \tilde{w} に関する凸二次計画問題なので、容易に解くことが出来る。特に、 $p = 1$ の場合には、二次方程式の解として陽に最適解が得られる。アルゴリズム 2 を実行した場合、以下の性質が保証される。

定理 3 システム (1), (2) について考える。 $x(0) - \Pi \tilde{w} \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ を満たす $\tilde{w} \in \mathcal{R}^p$ が存在するものとする。このとき、アルゴリズム 2 を実行すると、全ての時刻でアルゴリズム

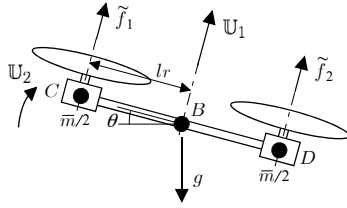


Fig. 5 Actuator Part

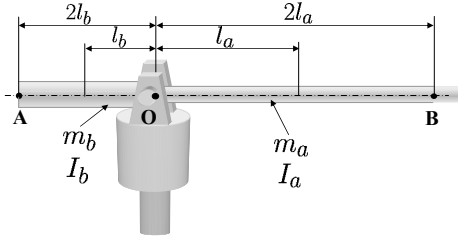


Fig. 6 Rotation Part

4.1 数式モデル

Figs. 4~6 のシステムの運動方程式は次式で記述される．

$$\dot{x} = \mathbb{F}(x) + \mathbb{G}(x)\tilde{U} \quad (13)$$

$$\tilde{U} = \Xi_1(x)U - \tilde{g} \quad (14)$$

$$U = \Xi_2\tilde{f} \quad (15)$$

ただし, $x := [v_x, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2]^T$, $\tilde{g} := [\frac{Mg}{L_2} \cos y_1, 0]^T$, $\tilde{U}, U, \tilde{f} \in \mathcal{R}^2$ および

$$\mathbb{F}(x) := \begin{bmatrix} \frac{L_1}{L_2} Mg \tan \theta_1 \cos y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_1 (v_x^2 - y_2^2) \end{bmatrix}, \mathbb{G}(x) := \begin{bmatrix} L_1 \tan \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$\Xi_1(x) := \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Xi_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l_r & -l_r \end{bmatrix}$$

である． x_1 は機体の水平方向の回転角度, v_x ($:= \dot{x}_1$) は水平方向の回転角速度, y_1 は垂直方向の回転角度, θ_1 は機体の姿勢角, U_1 は機体の揚力, U_2 は機体の姿勢に対する回転力 (Fig. 5 参照), g は重力加速度を表す． \tilde{f} は機体両端に設置されたローターが発生する推力を表す． l_r は機体重心からアクチュエータまでの距離を表す．また,

$$L_1 := \frac{2l_a}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\tilde{m} l_a^2 + I_a + I_b + \tilde{m} l_r^2}$$

$$L_2 := \frac{2l_a}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\tilde{m} l_a^2 + I_a + I_b}$$

$$L_3 := \frac{1}{\tilde{m} l_r^2}$$

$$M := \frac{m_a l_a + 2\tilde{m} l_a - m_b l_b}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\tilde{m} l_a^2 + I_a + I_b}$$

である．ここで, I_a, I_b は, Fig. 6 に示すロッド AB の, 区間 OB 部および区間 AO 部の, それぞれの中央を通り, ロッドに

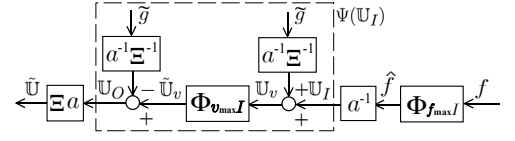


Fig. 7 Equivalent Transformation

垂直な軸周りの慣性モーメントを表す．ローターが発生する推力 \tilde{f} [N] と駆動用モータドライバへの入力電圧 \tilde{U}_v [V] の間には

$$\tilde{f} = a\tilde{U}_v \quad (16)$$

の関係が成り立つものとする．ただし $a = \text{diag}[a_1, a_2]$ であり, a_i [N/V] は換算係数である．なお, モータドライバへの入力電圧 \tilde{U}_v は, 次式により算出することにする．

$$\tilde{U}_v = \Phi_{v_{\max}} I(U_v) \quad (17)$$

ここで, U_v は制御器が算出する制御入力信号を表す．また, v_{\max} は入力電圧の制限値である．

実験装置の各物理パラメータの値は, $m_a = 0.325$ [kg], $m_b = 0.52$ [kg], $\tilde{m} = 0.158$ [kg], $I_a = 0.0715$ [kgm²], $I_b = 0.04$ [kgm²], $l_a = 0.43$ [m], $l_b = 0.24$ [m], $l_r = 0.188$ [m], $v_{\max} = 5.5$ [V], $a_1 = 0.2729$ [N/V], $a_2 = 0.2846$ [N/V] である．これらの値は, 部品単位での計測や予備実験から得られたデータ基に算出した．なお, 上記の数式モデルでは, 回転部の摩擦, 空気抵抗などは無視している．

4.2 目標信号追従制御器の設計

本稿では, 前節で導出したツインローター浮上系の数式モデルについて, ローター推力の制限 (17) の下で, 機体の垂直方向変位および姿勢角を安定化し, かつ, 機体水平方向角速度 v_x を目標速度へ追従させる制御問題について考える．第 4.2.1 節では, 制御対象 (13)–(17) を標準形 (1), (2) に帰着する方法を示す．第 4.2.2 節では, 制御器を設計する際に必要となるパラメータの値を示す．

4.2.1 制御対象の標準形への帰着

式 (13) を $x = 0$ 近傍で線形化し, さらに, 零次ホールドを用い, サンプル周期 T で離散化すると次式が得られる．

$$x(t+1) = A_d x(t) + B_d \tilde{U}(t) \quad (18)$$

ただし, $A_d := \exp(A_c T)$, $B_d := \int_0^T \exp(A_c \tau) d\tau B_c$ および $A_c := \partial \mathbb{F} / \partial x|_{x=0}$, $B_c := \mathbb{G}(0)$ である．

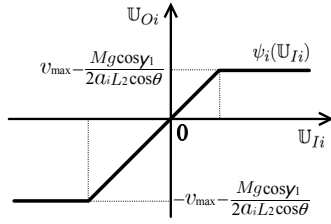
U_v を次式に従い算出することにする．

$$U_v = a^{-1} (\hat{f} + \Xi(x)^{-1} \tilde{g}) \quad (19)$$

$$\hat{f} = \Phi_{f_{\max}} I(f) \quad (20)$$

ただし, $\Xi(x) := \Xi_1(x)\Xi_2$, $f_{\max} := \min[f_{\max,1}, f_{\max,2}]$, $f_{\max,i} := a_i [v_{\max} - Mg / (2a_i L_2 \cos \theta_{\max})]$, θ_{\max} は $|\theta|$ の最大値, f は制御器により算出されるローター推力の目標値である．ここで以下を仮定する．

仮定 3 v_{\max}, θ_{\max} について, $Mg / (2a_i L_2 \cos \theta_{\max}) \leq v_{\max}$ の関係が成り立つものとする．

Fig. 8 Nonlinear element $\Psi(\cdot)$

上記の仮定は，ツインロータ浮上系が，高度を保って飛行するための必要条件を表している．このとき，

$$\tilde{\mathbf{U}} = \Xi(x)\hat{f} \quad (21)$$

が成り立つ．以下，これについて説明を行う．いま， $\mathbf{U}_O := \tilde{\mathbf{U}}_v - a^{-1}\Xi(x)^{-1}\tilde{g}$ ， $\mathbf{U}_I := a^{-1}\hat{f}$ ， $\Psi(\mathbf{U}_I) := \Phi_{v_{\max}I}(\mathbf{U}_I + a^{-1}\Xi(x)^{-1}\tilde{g}) - a^{-1}\Xi(x)^{-1}\tilde{g}$ とすると，式 (14)–(17)，(19)–(20) により記述される f から $\tilde{\mathbf{U}}$ までの入出力関係は，等価に，

$$\tilde{\mathbf{U}} = \Xi(x)a\mathbf{U}_O \quad (22)$$

$$\mathbf{U}_O = \Psi(\mathbf{U}_I) \quad (23)$$

および $\mathbf{U}_I := a^{-1}\hat{f}$ ，式 (20) に書き換えられる (Fig. 7 参照)．ところで $a^{-1}\Xi(x)^{-1}\tilde{g} = a^{-1}Mg \cos y_1 / (2L_2 \cos \theta_1)[1, 1]^T$ の関係が成り立つことおよび仮定 3 より，非線形要素 $\Psi(\mathbf{U}_I)$ の第 i 要素 $\psi_i(\mathbf{U}_{Ii})$ は， $Mg \cos y_1 / (2a_i L_2 \cos \theta_1)$ だけ中心がオフセットした飽和関数となる (Fig. 8 参照)．したがって，上述のように f_{\max} を選ぶと，どのような f が加わっても， \mathbf{U}_I は非線形関数 $\Psi(\mathbf{U}_I)$ の線形な領域に留まる．その結果， $\mathbf{U}_O = \mathbf{U}_I$ が常に成り立つので，式 (21) が成り立つと結論できる．

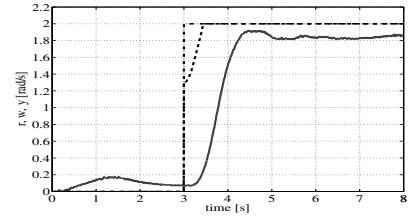
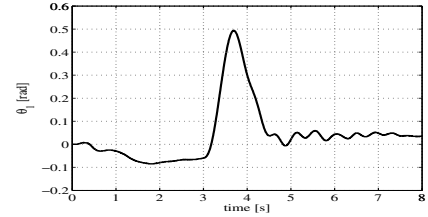
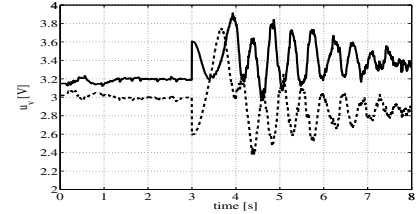
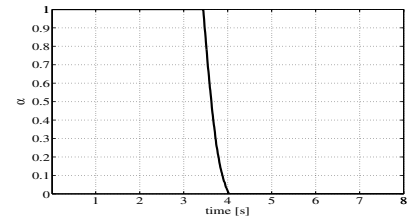
また，飽和関数の定義より， $\phi_{f_{\max}}(f_i) = f_{\max}\phi(f_i/f_{\max})$ の関係が成り立つので，式 (20) は，等価に次式で表せる．

$$\begin{cases} \hat{f} &= f_{\max}\tilde{u} \\ \tilde{u} &= \Phi(u) \\ u &= \frac{1}{f_{\max}}f \end{cases} \quad (24)$$

以上をまとめ，式 (18)，(21)，(24) より，本節では，制御対象のダイナミクス (1) 係数行列は， $A = A_d$ ， $B = B_d\Xi(0)f_{\max}$ ， $E = 0$ で与えるものとする．また，ここでは，機体水平方向の角速度 v_x の追従制御問題について考えるので，評価出力は $z := w - y$ ， $y := v_x$ とする．この制御対象に対して，前節の制御手法を適用して制御入力 u を算出する．なお，実際の制御入力 \mathbf{U}_v は，式 (19)，(20) および，式 (24) の第三式より算出される．

4.2.2 制御器設計および実装

サンプル周期を $T = 5[\text{ms}]$ ， $\theta_{1\max} = 0.578[\text{rad}]$ とした．このとき， $f_{\max} = 0.4745$ となる．線形方程式 (5)，(6) の解は $\Pi = [1, 0, 0, 0, 0]^T$ ， $\Gamma = [0, 0]^T$ となる． $\gamma_0 = 16$ ， $\gamma_1 = 260$ ， $\mathbf{R} = 0.1\mathbf{I}$ ， $\eta = 1$ ， $\mathbf{S} = \text{diag}[0.01, 1.5, 0.1, 1, 0.1]$ として，定理 1 の LMI 条件 (7)，(8)，(9) を満たす行列を数値最適化により算出した．ただし，補足 2 の評価関数の拡張を行った．得られた行列を用い，可変ゲイン $F(\alpha)$ ， $M(\alpha)$ を算出した．なお，制御アルゴリズムは，Matlab/xPC Target を用い，コンピュー

Fig. 9 r :dash-dot, w :dashed, y :solid (gain-scheduled FB)Fig. 10 θ_1 (gain-scheduled FB)Fig. 11 \mathbf{U}_{v1} :solid, \mathbf{U}_{v2} :dashed (gain-scheduled FB)Fig. 12 α

タ (Intel Core2 3GHz, 2GB RAM) 上に実装した．また，アルゴリズムに含まれる α の最適化問題は，Matlab のコマンド eig を用い，固有値問題として解いた．

4.3 実験結果

Figs. 9~12 にアルゴリズム 2 を実行した場合の実験結果を示す．ただし，制御開始時刻は $t = 3[\text{s}]$ であり，目標信号は $r(t) = 2\text{rad/s}$ ， $\forall t \geq 3[\text{s}]$ とした．ここで適用している制御則には，第 3 節で述べた，ロバスト性向上のための制御アルゴリズムの修正は行われていないが，アルゴリズムの可解性は全時刻で保たれており， α は単調に減少している．制御開始直後に目標信号の修正が行われていることが確認できる．このことは，仮にアルゴリズム 1 を適用していた場合，初期時刻で解が存在せず，制御不能となっていたことを意味する．また， $y(t)$ は $r(t)$ に追従していることが確認できる．ただし，10% 程度の定常偏差が生じているが，これは，制御器設計時に無視した各軸受け

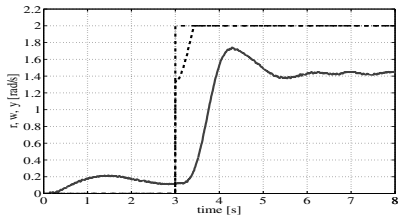


Fig. 13 r :dash-dot, w :dashed, y :solid (constant low-gain FB)

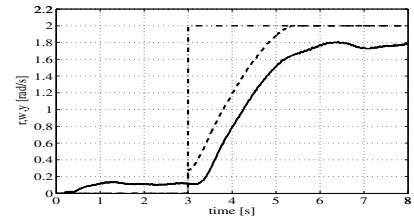


Fig. 16 r :dash-dot, w :dashed, y :solid (constant high-gain FB)

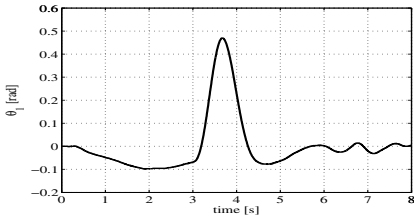


Fig. 14 θ_1 (constant low-gain FB)

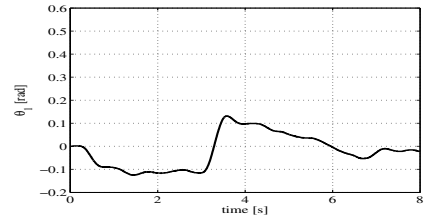


Fig. 17 θ_1 (constant high-gain FB)

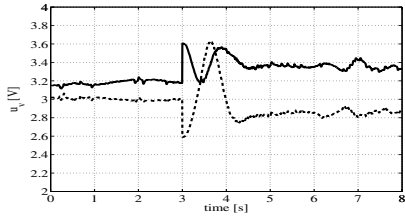


Fig. 15 U_{v1} :solid, U_{v2} :dashed (constant low-gain FB)

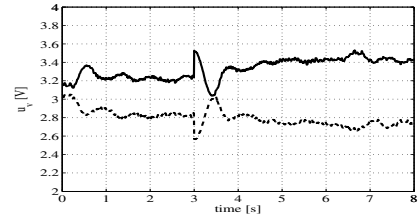


Fig. 18 U_{v1} :solid, U_{v2} :dashed (constant high-gain FB)

部の粘性抵抗や摩擦，空気抵抗が，実機では存在するためであると思われる．なお，制御入力 u が過渡的に振動的な振る舞いを示しているが，これは，制御開始時に発生した機体姿勢の傾きを，ハイゲインフィードバックで強く抑制する際に生じたものである．つぎに，Figs. 13~15に，固定ローゲインフィードバック制御則 $u(t) = F(1)x(t) + M(1)w(t)$ を用いた場合（アルゴリズム2において $\alpha = 1$ に固定した場合）の実験結果を示す．可変ゲインフィードバックを用いた場合と比較して，大きな定常偏差が生じている．可変ゲインフィードバックを用いた場合に定常偏差がより圧縮されているのは， $y(t)$ が $r(t)$ に近づくにつれ，よりハイゲインな制御器が用いられ，その結果として，粘性抵抗等の影響が抑制されたためであると思われる．つぎに，Figs. 16~18に，固定ハイゲインフィードバック制御則 $u(t) = F(0)x(t) + M(0)w(t)$ を用いた場合（アルゴリズム2において $\alpha = 0$ に固定した場合）の実験結果を示す．ハイゲインフィードバック制御器を用いた場合，状態量は原点近傍の小さな安定領域内に拘束されるので，Fig. 17に示すように，機体姿勢角を過渡的に大きく傾けることが出来なくなる．その結果，水平方向の加速度を大きくすることが出来なくなり，制御量が定常値へ収束するのに，可変ゲイン制御器や固定ローゲイン制御器を用いた場合と比較して，より多くの時間を要している．

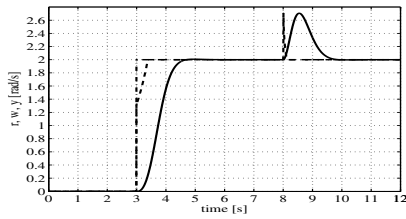
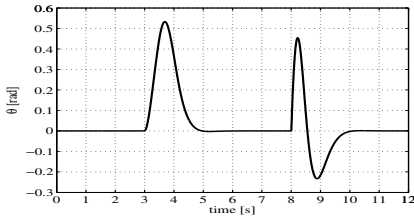
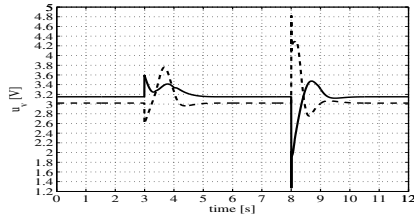
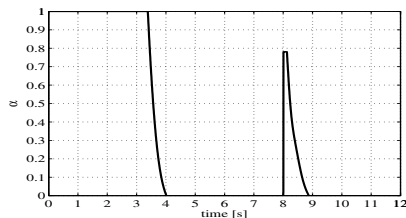
補足4 通常の固定時不変制御器の場合と同様に，提案可変ゲイン制御手法を用いた場合においても，どの程度のサンプル周期が必要とされるかは，制御対象の動特性により決定される．

今回の実験ではサンプル周期は5[ms]としているが，この値は，数値シミュレーションおよび予備実験から試行錯誤的に定めたものである．ただし，今回の手法の場合，毎時刻最適化問題を解く必要があるため，それに要する時間よりも，サンプル周期は十分長く設定する必要がある．今回の計算機環境の場合，毎時刻の最適化問題を解くのに要する時間は0.26[ms]であった．

補足5 可変ゲイン制御器を用いた場合における制御入力の振動的振る舞いは， γ_0 をより大きな値に設定して制御器設計を行い，ハイゲイン制御器のゲインを小さく抑えることで，ある程度抑制できるものと思われる．ただし，この場合，制御量の定常偏差は，より大きなものとなる．逆に，制御量の定常偏差は， γ_0 をより小さな値に設定して制御器設計を行い，ハイゲイン制御器のゲインをより大きくすることで，ある程度圧縮出来るものと予想される．ただし，過度にハイゲインな制御器を設計すると，モデル化誤差（特にアクチュエータのダイナミクス等の動的遅れ）の影響がより強く現われ，フィードバック系の安定余裕が小さくなり，応答特性が劣化する可能性がある．

4.4 外乱応答の数値シミュレーション結果

Figs. 19~22に，アルゴリズム2に第3.2節の修正を施した制御アルゴリズムを用いた場合の，外乱応答の数値シミュレーション結果を示す．ただし，外乱としては，機体中央B点周りに，大きさ2[Nm]のトルク外乱を，8[s]から10[ms]間加えている．それ以外の条件は，前節の実験の場合と同様である．外乱が加わった直後， α が大きな値となり，さらに，修正目標信

Fig. 19 r :dash-dot, w :dashed, y :solid (gain-scheduled FB)Fig. 20 θ_1 (gain-scheduled FB)Fig. 21 U_{v1} :solid, U_{v2} :dashed (gain-scheduled FB)Fig. 22 α

号 w が適当に調節されることにより、アルゴリズムの可解性が保たれていることが確認できる。同様の外乱を固定ハイゲイン制御器を用いたシステムに加えると、 α を拡大しない限り安定領域内に状態量を留めることはできないので、外乱が加わった直後、状態量は安定領域外に押し出され、制御不能となる。なお、ロータにより、仮想的にトルク外乱を発生させることで、上述の結果を実験的に検証することを試みたが、推力制限のため、実行することは困難であった。そこで、ここでは、数値シミュレーション結果のみを掲載している。

5. おわりに

本稿では、ツインロータ浮上系に対する目標速度追従制御則の設計を文献 [15] の手法に基づき行った。このときに必要となる入力変換について説明を行った。さらに、設計した制御器をコンピュータ上に実装し、実機によりその有効性の検証を行っ

た。その結果、制御系設計時に無視した外乱やモデル化誤差、演算遅れ等が存在するにも関わらず、目標速度への追従をほぼ達成できることが確認できた。また、固定ローゲイン制御器を用いた場合との比較を行った結果、可変ゲイン制御器を用いると、より高い追従性能を達成出来ることが確認できた。今回の制御系設計では、実験装置の機構的制約のため上下方向の変位は安定化させているが、上下方向も含めて目標速度追従制御系を設計することも可能である。

参考文献

- [1] J. Åkesson and K.J. Åström: “Manual control and stabilization of an inverted pendulum,” Proc. IFAC World Congress, 2005.
- [2] F.Allgöwer and A.Zhen(Eds.): “Nonlinear Model Predictive Control,” Birkhäuser, 2000.
- [3] C.Barbu, R.Reginato, A.R.Teel and L.Zaccarian: “Anti-windup design for manual flight control,” Proc. American Control Conference, pp.3186-3190, 1999.
- [4] A. Bemporad: “Predictive Control of Teleoperated Constrained Systems with Unbounded Communication Delays,” Proc. IEEE Conf. Decision & Control, pp.2133-2138, 1998.
- [5] D.S.Bernstein and A.N.Michel: “A chronological bibliography on saturating actuators,” International Journal of Robust and Nonlinear control, vol.5, pp.375-380, 1995.
- [6] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron and V.Balakrishnan: “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,” SIAM (1994)
- [7] 藤森: “ロボスト制御,” コロナ社 2001.
- [8] T.Hu and Z.Lin: “Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design,” Springer, 2001.
- [9] 井村, 家木, 佐伯, 和田: “動的状態フィードバックによる厳密な線形化法を用いたツインローターヘリコプターモデルの基礎実験,” 日本機械学会論文集 (C編), vol.66, no.648, pp.2630-2637, 2000.
- [10] 野波: “回転翼系空中ロボティクス,” 日本ロボット学会誌「特集: 空中ロボティクス」, vol.24, no.8, pp.890-896, 2006.
- [11] M.Pachter and R.B.Miller: “Manual Flight Control with Saturating Actuators,” IEEE Control Systems, February, 1998.
- [12] A.Saberi, A.A.Stoorvogel and P.Sannuti: “Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints,” Springer, 2000.
- [13] N.Wada and M.Saeki: “An LMI Based Scheduling Algorithm for Constrained Stabilization Problems,” Systems & Control Letters, vol.57, pp.255-261, 2008.
- [14] N.Wada and M.Saeki: “A Scheduling Algorithm for Constrained Control Systems: An Approach Based on a Parameter Dependent Lyapunov Function,” Proc. American Control Conference, pp.5200-5205, 2007.
- [15] N.Wada and M.Saeki: “Tracking Control with Saturating Actuators: A Method Based on State-Dependent Gain-Scheduling and Reference Management,” Proc. 17th IFAC World Congress, 2008. (to appear)

付録 A. 補題

補題 1 [8] $u, v \in \mathcal{R}^m$ であるものとする。 $|v_j| \leq 1, \forall j \in [1, m]$ であるものとする。 $\Phi(u)$ は $\Phi(u) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j (\mathbf{E}_j u + \mathbf{E}_j^- v)$ と表せる。ただし、 $0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1$ である。

付録 B. 定理 1 の証明

式 (1), (3), (4), (5), (10) より、次式が得られる。

$$\xi(t+1) = A\xi(t) + B\Psi(F(\alpha)\xi(t)) \quad (\text{B.1})$$

ただし、 $\Psi(F(\alpha)\xi) := \Phi(F(\alpha)\xi + \Gamma w) - \Gamma w$ である。以下

では、はじめに、 $\xi \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ および $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ が成り立つ場合に、 $\Psi(F(\alpha)\xi) = \Psi(F(\alpha)\xi) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \{\mathbf{E}_j F(\alpha) + \mathbf{E}_j^- H(\alpha)\} \xi$ と表せることを示す。ただし、 $H(\alpha) := Z(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$, $Z(\alpha) := (1 - \alpha)Z_0 + \alpha Z_1$, $\rho := \text{diag}[\rho_1, \dots, \rho_m]$ である。 $\xi \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ および $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ が成り立つ場合、 $|H(\alpha)^{(l)} \xi + \Gamma^{(l)} w| \leq 1, \forall l \in [1, m]$ が成り立つ。よって、補題 1 より、 $\Phi(F(\alpha)\xi + \Gamma w) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \{\mathbf{E}_j (F(\alpha)\xi + \Gamma w) + \mathbf{E}_j^- (H(\alpha)\xi + \Gamma w)\}$ が成り立つ。これより、 $\Psi(F(\alpha)\xi) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \{\mathbf{E}_j F(\alpha) + \mathbf{E}_j^- H(\alpha)\} \xi$ が成り立つことを示すことができる。この関係を用いると、 $\xi(t) \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ および $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ が成り立つとき、閉ループ系 (1), (3) および (10) は次式で表せる。

$$\xi(t+1) = \mathcal{A}(\lambda(t))\xi(t) \quad (\text{B.2})$$

ただし、 $\mathcal{A}(\lambda) := \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \mathcal{A}_j$, $\mathcal{A}_j := A + B\{\mathbf{E}_j F(\alpha) + \mathbf{E}_j^- H(\alpha)\}$ である。一方、定義より、 \mathbf{z} は次式で表される。

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}x + \mathbf{D}\Phi(u) + \mathbf{D}_w w \quad (\text{B.3})$$

ただし、 $\mathbf{C} := [C^T, F(\alpha)^T \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}]^T$, $\mathbf{D}_w := [D_w^T, (M(\alpha) - \Gamma)^T \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}]^T$ である。ところで、(5), (6) を満たす行列 Π, Γ は

$$\mathbf{C}\Pi + \mathbf{D}\Gamma + \mathbf{D}_w = 0. \quad (\text{B.4})$$

を満たす。式 (B.3), (B.4) および (10) より、 $\xi(t) \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ および $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ である場合、 $\mathbf{z}(t)$ は次式で表せる。

$$\mathbf{z}(t) = \mathcal{C}(\lambda(t))\xi(t) \quad (\text{B.5})$$

ただし、 $\mathcal{C}(\lambda) := \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \mathcal{C}_j$, $\mathcal{C}_j := \mathbf{C} + \mathbf{D}\{\mathbf{E}_j F(\alpha) + \mathbf{E}_j^- H(\alpha)\}$ である。式 (B.2) および (B.5) より、 ξ -座標系では、フィードバック系は、外部入力加わらないシステムとみなせる。以下では、この表現に基づいて定理 1 が成り立つことを示す。

以下では、はじめに、(8) が成り立つとき、 $\mathcal{E}(P(\alpha), \eta) \subseteq \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ が成り立つことを示す。式 (8) より、以下が得られる。

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha) & * \\ Z(\alpha)^{(l)} & \frac{\rho_l^2}{\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \forall l \in [1, m] \quad (\text{B.6})$$

式 (B.6) に $Z(\alpha)^{(l)} = H(\alpha)^{(l)}Q(\alpha)$ を代入し、行列 $\text{block-diag}[Q(\alpha)^{-1}, 1]$ により合同変換を行い、 $Q(\alpha)^{-1} = P(\alpha)$ を代入し、Schur complement を適用すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho_l^2} H(\alpha)^{(l)T} H(\alpha)^{(l)} \leq \frac{1}{\eta} P(\alpha), \forall l \in [1, m] \quad (\text{B.7})$$

式 (B.7) は $\mathcal{E}(P(\alpha), \eta) \subseteq \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ を意味する。

つぎに、 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ および $J < \gamma(\alpha)\eta$ が成り立つことを示す。式 (7) に対し、式 (B.6) を導出する際に行ったのと同様の操作を行い、導出した行列不等式に対し、 $Z(\alpha) = H(\alpha)Q(\alpha)$ および $Y(\alpha) = F(\alpha)Q(\alpha)$ を代入し、行列 $\text{block-diag}[Q(\alpha)^{-1}, I, I]$ により合同変換を行い、得られた行列

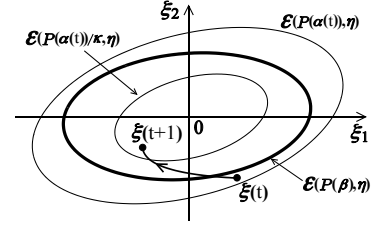


Fig. 23 Invariant set

不等式に $\lambda_j(t)$ を掛け、 $j = 1, \dots, 2^m$ で和をとると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & * & * \\ \mathcal{C}(\lambda(t)) & \gamma(\alpha)I & * \\ \mathcal{A}(\lambda(t)) & 0 & P(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.8})$$

式 (B.8) に Schur complement を適用し、左右からそれぞれ $\xi(t)^T$ および $\xi(t)$ を掛け、式 (B.2) および (B.5) の関係を用いると、以下の関係が得られる。

$$V(\xi(t+1)) - V(\xi(t)) < -\frac{1}{\gamma(\alpha)} \|\mathbf{z}(t)\|_2^2 \quad (\text{B.9})$$

ただし、 $V(\xi) := \xi^T P(\alpha)\xi$ である。式 (B.9) より、 $\xi(0) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta)$ のとき、以下の関係が成り立つ。

$$V(\xi(t)) < V(\xi(0)) \leq \eta, \forall t \geq 0 \quad (\text{B.10})$$

式 (B.10) より、 $\xi(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta), \forall t \geq 0$ が成り立つ。ところで、非線形要素 $\Psi(F(\alpha)\xi(t))$ は、 $\xi(t) \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho)$ かつ $\max_{t \geq 0} |\Gamma^{(l)} w(t)| < 1, \forall l \in [1, m]$ の場合に、 $\Psi(F(\alpha)\xi(t)) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) \{\mathbf{E}_j F(\alpha) + \mathbf{E}_j^- H(\alpha)\} \xi(t)$ と表せる。式 (B.7) および (B.10) より、定理 1 の条件が成り立つとき、 $\xi(t) \in \mathcal{L}(H(\alpha), \rho), \forall t \geq 0$ となるので、上記のポリティープ表現が成り立つための条件は満たされている。また、式 (B.9) より $\xi(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ となるので、 $\mathbf{z}(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が成り立つ。さらに、式 (B.9) および (B.10) より、 $\sum_{t=0}^{\infty} \|\mathbf{z}(t)\|_2^2 < \gamma(\alpha)\eta$ が成り立つ。

付録 C. 定理 2 の証明

本節では、はじめに、アルゴリズム 1 を適用すると、 $\alpha(t)$ は単調に減少することを示す。ある時刻 t において、アルゴリズム 1 の Step 2 は可解であるものとする。このとき、定理 1 より、 $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ をシステム (1) に加えると、 $\xi(t)^T P(\alpha(t))\xi(t) > \xi(t+1)^T P(\alpha(t))\xi(t+1)$ が成り立つ。ゆえに、ある正定数 $\kappa < 1$ について、 $\xi(t+1) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t))/\kappa, \eta)$ が成り立つ (Fig. 23 参照)。

以下では、 $\kappa\alpha(t) < \beta < \alpha(t)$ を満たす β について、 $\mathcal{E}(P(\alpha(t))/\kappa, \eta) \subset \mathcal{E}(P(\beta), \eta) \subset \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ が成り立つことを示す。

• $\mathcal{E}(P(\beta), \eta) \subset \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ について：

仮定より $Q_0 < Q_1$ および $\beta < \alpha(t)$ が成り立つので、 $0 < (\alpha(t) - \beta)(Q_1 - Q_0)$ が成り立つ。このことは、 $\mathcal{E}(P(\beta), \eta) \subset \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ を意味する。

- $\mathcal{E}(P(\alpha(t))/\kappa, \eta) \subset \mathcal{E}(P(\beta), \eta)$ について：
 仮定より $\kappa\alpha(t) < \beta < \alpha(t)$ が成り立つ．また， $\kappa < 1$ および $\alpha(t) \leq 1$ より， $(1-\kappa)\alpha(t) \leq (1-\kappa)$ が成り立つ．これより $\alpha(t) \leq \kappa\alpha(t) + (1-\kappa)$ が成り立つ．以上より， $\kappa\alpha(t) < \beta < \kappa\alpha(t) + (1-\kappa)$ の関係が得られる．この関係および $Q_0 < Q_1$ より， $0 < [(1-\kappa) - (\beta - \kappa\alpha(t))]Q_0 + [\beta - \kappa\alpha(t)]Q_1$ が成り立つ．これは， $\mathcal{E}(P(\alpha(t))/\kappa, \eta) \subset \mathcal{E}(P(\beta), \eta)$ が成り立つことを意味する．

上記の議論より， $\kappa\alpha(t) < \beta < \alpha(t)$ を満たすあるスカラー β について， $\mathcal{E}(P(\alpha(t))/\kappa, \eta) \subset \mathcal{E}(P(\beta), \eta) \subset \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ が成り立つ (Fig. 23) 参照．時刻 $t+1$ での解を $\alpha(t+1) = \beta$ と選ぶものとする．このとき，明らかに $\xi(t+1) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t+1)), \eta)$ が成り立つ．すなわち，アルゴリズム 1 の Step 2 の最適化問題は時刻 $t+1$ でも可解であり，解 $\alpha(t+1)$ は $\alpha(t+1) < \alpha(t)$ を満たす．同様の議論は時刻 $t+2, t+3, \dots$ でも成り立つ，よって， $\alpha(t)$ は単調に減少すると結論出来る．また $\alpha(t) \geq 0$ なので， $\alpha(t) = 0, \forall t \geq T$ を満たすある時刻 T が存在する (もしそのような時刻が存在しないと仮定すると， $\xi \neq 0$ の場合に必ず $V(\xi)$ が減少するとの定理 1 の結果に矛盾する)．ある時刻 T 以降， $u(t) = F(0)x(t) + M(0)w(t)$ がシステム (1), (2) に加えられる．その結果，定理 1 より， $\xi(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が成り立つ．その結果， $z(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ が成り立つ．

付録 D. 定理 3 の証明

はじめに，アルゴリズム 2 の可解性が全時刻で保証されることを示す．アルゴリズム 2 では，時刻 $t=0$ で $x(0) - \Pi r(0) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ が成り立っている場合，Step 4 の最適化問題が解かれ， α が更新される．明らかに， $\alpha \leq 1$ を満たす解 α が存在する．一方， $x(0) - \Pi r(0) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ が成り立たない場合，Step 3 の最適化問題が解かれ，修正目標信号 \tilde{w} が算出される．解 \tilde{w} の存在性は仮定より保証される．よって，時刻 $t=0$ では，解 $\alpha(0), w(0)$ は必ず存在する．このようにして得られた $\alpha(0), w(0)$ を用いて算出した制御入力 $u(0) = F(\alpha(0))x(0) + M(\alpha(0))w(0)$ をシステム (1), (2) に入力すると，定理 2 より，不等式 $(x(1) - \Pi w(0))^T P(\alpha(0))(x(1) - \Pi w(0)) < (x(0) - \Pi w(0))^T P(\alpha(0))(x(0) - \Pi w(0))$ が成り立つ．よって， $x(1) - \Pi w(0) \in \mathcal{E}(P(\alpha(0)), \eta)$ が成り立つ．このことは，時刻 $t=1$ で解 $\alpha(1), w(1)$ が存在することを意味する．同様の議論は $t \geq 2$ においても成り立つ．よって，アルゴリズム 2 の可界性は全時刻で保証される．

つぎに， $r(t) = \bar{r}, \forall t \geq T_r$ である場合に， $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \bar{r}$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ が成り立つことを示す．はじめに，ある時刻 t において，条件 $x(t) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ は成り立つが， $w(t) = \bar{r}$ は成り立たない場合について考える (等式 $w(t) = \bar{r}$ が成り立つ場合，定理 2 より， $z(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ となることが直ちに保証される)．この場合，Step 3 で修正目標信号 $w(t) \neq \bar{r}$ が算出され，スケジューリングパラメータは $\alpha(t) = \alpha(t-1)$ と選ばれる．このようにして得られた $\alpha(t), w(t)$ を用いて算出した制御入力 $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ をシステムに加えると， $x(t+1) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta\kappa)$ が成り立つ (Fig. 24 参照)．ただし， κ はある正定数 $\kappa < 1$ で

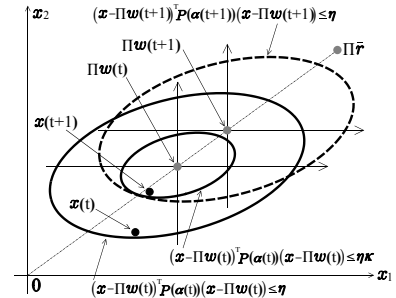


Fig. 24 Graphical Interpretation of Algorithm 2

ある．つぎに，時刻 $t+1$ において等式 $w(t+1) = \bar{r}$ が成り立たない場合，Step 3 において，修正目標信号 $w(t+1) \neq \bar{r}$ が算出され，また，スケジューリングパラメータは $\alpha(t+1) = \alpha(t)$ と選ばれる．この場合， $x(t+1) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta\kappa)$ なので， $\Pi w(t+1)$ は $\|\Pi \bar{r} - \Pi w(t)\|_2$ が減少するように選ぶことが可能である (Fig. 24 参照)．よって，このプロセスを繰り返すことにより，ある時刻で $x(t) - \Pi \bar{r} \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta)$ が成り立つ．その結果， $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \bar{r}$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ が成り立つ．

和田信敬 (Nobutaka Wada)

1971 年 6 月 3 日生．2000 年広島大学大学院工学研究科博士課程修了．2001 年同大学助手 (2007 年より助教) となり現在に至る．ロボスタ制御，拘束システム制御およびその機械システム応用に関する研究に従事．博士 (工学)．計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本機械学会の会員．
(日本ロボット学会正会員)

南 昌行 (Masayuki Minami)

1986 年 3 月 5 日生．2008 年広島大学工学部第一類 (機械システム工学系) 卒業．同年同大学大学院工学研究科博士課程前期機械システム工学専攻入学．現在に至る．

松尾祥也 (Yoshiya Matsuo)

1984 年 10 月 23 日生．2007 年広島大学工学部第一類 (機械システム工学系) 卒業．同年同大学大学院工学研究科博士課程前期機械システム工学専攻入学．現在に至る．

佐伯正美 (Masami Saeki)

1953 年 1 月 14 日生．1981 年京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学．同年同大学工学部助手．1982 年筑波大学電子・情報工学系講師，助教を経て，1992 年より広島大学工学部教授．現在同大学大学院工学研究科教授．ロボスタ制御とその応用に関する研究に従事．工学博士．計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本機械学会，IEEE などの会員．