2019 年後期 線型代数演習 II 第 1 回 (10/3 配布)

キーワード: 行列の積, 行列の基本変形と階数, 掃き出し法,

問 1. 以下の行列 A, B の積 AB, BA をそれぞれ求めよ. ただし積が定義されない場合にはその旨を述べよ.

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\\1&1\end{pmatrix}\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

問 2. 各実数 θ について, 二次正方行列 $R(\theta)$ を

$$R(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

と定める. このとき, 任意の $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ について,

$$R(\theta_1)R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2)$$

が成り立つことを示せ (Hint: 三角関数の加法定理を用いてよいこととする).

問 3. $A^2=E$ となる二次正方行列 A をすべて求めよ. ただし, ここでは E は二次の単位行列とする.

問 4. $A^2=0$ となる二次正方行列 A をすべて求めよ. ただし, ここでは 0 は二次の零行列とする.

問 5. 以下の行列を基本変形し, 階数を決定せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&2&-6\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&5&3\\2&3&4\\3&1&5\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

問 6. 行列 $\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}$ の階数を求めよ. ただし a,b,c は実数とする.

問 7. 行列の基本変形を「ある種の正則行列を掛ける操作」として説明せよ.

問 8. A を n 行 m 列の行列とし, B を m 行 l 列の行列とする. また r_A, r_B, r_{AB} をそれぞれ A, B, AB の階数とする (ただし AB は A と B の積を表す). このとき

$$r_{AB}\le\min\{r_A,r_B\}$$

となることを示せ.

問 9. 掃き出し法を用いて以下の線型連立方程式を解け (解が存在しない場合はその旨説明し, 解が一意に定まらない場合はすべての解を求めよ):

$$(1)\ \begin{cases}x-y+2z+u=9\\2x+y-z+3u=6\\x+3y+2z-2u=2\\-3x+z+4u=-3\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}x+3y+z-8u=3\\-2x-5y-z+13u-4\\3x+8y+2z-21u=0\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases}-2x+5y-7z=-6\\3x+4y-5z=-7\\7x-6y+9z=5\end{cases}$$

問 10. 掃き出し法を用いて以下の行列が正則か否かを判定し, 正則である場合は逆行列を求めよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&2&-1&1\\-1&-1&1&-1\\2&1&-1&2\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-2&0&-6&-2\\0&2&4&5\\2&-3&3&-1\end{pmatrix}$$