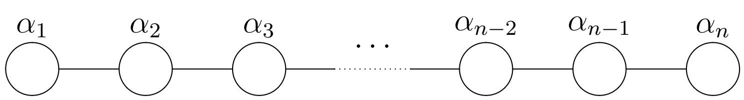
先端数学: リー環の随伴軌道と Dynkin 図形

担当: 奥田隆幸

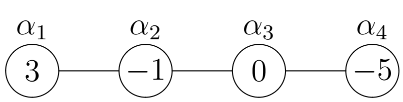
1　重み付き A_n 型 Dynkin 図形ゲーム

n を自然数とする. A_n 型 Dynkin 図形とは, 以下のようなものであるとする:



ここで登場した n 個の白丸 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を "頂点" といい, それらを結ぶ線を "辺" という.

A_n 型 Dynkin 図形の頂点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に, それぞれ実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が書き込まれたものを考える. これを重み付き A_n 型 Dynkin 図形といい, 実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を各頂点の重みと呼ぶ. 例えば $n = 4$ として



などは重み付き A_4 型 Dynkin 図形の例となる (ここでは簡単のために整数のみの例を挙げたが, 実数ならなんでも OK).

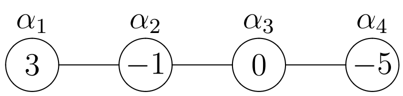
重み付き A_n 型 Dynkin 図形を用いて, 次のような一人用のゲームを考える:

操作: プレイヤーが頂点のうち一つを指定すると, 選んだ頂点に応じて重み $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が以下のように変化する:

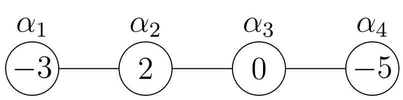
操作 s_k: 選んだ頂点が α_k であるとする. α_k と辺で結ばれているすべての頂点に対し, "その頂点の重みに λ_k を加える" という操作を

行う. またその後 α_k の重み λ_k の符号をひっくり返す (-1 倍する). この一連の操作を s_k と呼ぶことにする.[1]

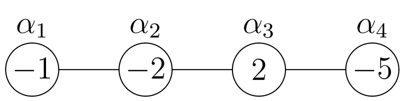
例えば



に対して頂点 α_1 を選んだ場合, 操作 s_1 を施すと



となる. 更に続けて頂点 α_2 を選んだ場合, 操作 s_2 を施せば



となる.

ゲームの進行とゴール条件: プレイヤーは「頂点を一つ自由に選び, その頂点に対応する操作を施す」という手順を繰り返す. 初期の状態から出発して, **全ての数が非負になったらゴール**.

---

[1] 操作 s_k は以下のような写像として表せる:

$$s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$$

ただし

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_{k-1} + \lambda_k & (\text{ if } i = k-1), \\ \lambda_{k+1} + \lambda_k & (\text{ if } i = k+1), \\ -\lambda_k & (\text{ if } i = k), \\ \lambda_i & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

- $n = 4$ とし初期数列を

$$\overset{\alpha_1}{3} \;—\; \overset{\alpha_2}{-1} \;—\; \overset{\alpha_3}{0} \;—\; \overset{\alpha_4}{-5}$$

  とする. うまく手順をこなし, ゴールせよ.

- 上と同じ初期状態

$$\overset{\alpha_1}{3} \;—\; \overset{\alpha_2}{-1} \;—\; \overset{\alpha_3}{0} \;—\; \overset{\alpha_4}{-5}$$

  について, 別の手順を踏んでもう一度ゴールせよ. またゴールした時の状態が最初にプレイした時と同じであることを確認せよ.

- $n = 2$ とし初期状態を

$$\overset{\alpha_1}{-1} \;—\; \overset{\alpha_2}{-1}$$

  とする. 最短で何回の手順でゴールできるか？

- $n = 3$ とし初期状態を

$$\overset{\alpha_1}{-1} \;—\; \overset{\alpha_2}{-1} \;—\; \overset{\alpha_3}{-1}$$

  とする. 最短で何回の手順でゴールできるか？

レポート問題 1.1. *1.* $n = 2$ とする．同じ初期状態から出発すると，どういう手順でゴールしても，最終的な状態は同じものになってしまうことを示せ．

2. 上記の命題を *“n : 一般の自然数”* で示せ．

3. $n = 2$ とする．最短手順でゴールするための理論を作れ．

4. *“n : 一般の自然数”* の場合に，最短手順でゴールするための理論を作れ．

5. 左右対称，つまり “$\lambda_i = \lambda_{n+1-i}$ *for any* i” な初期状態から出発すると，(一般には途中で左右対称性は崩れるが，) ゴール時には必ず左右対称となることを示せ．

上記の話は「単純リー環 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ や $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p, q)$ などの双曲型随伴軌道の分類」と深く関わっている．[2]

[2]詳しく知りたい人は奥田 okudatak@hiroshima-u.ac.jp まで連絡ください．