

Section 1 : イントロダクション

内容 : 多様体論

扱うトピック :

- C^∞ -多様体
- C^∞ -写像
- 接空間
- ベクトル場 (微分方程式)
- C^∞ -写像の微分

Recall : 位相空間 ... 連続性のモノイド での集合
(“開集合系” を定める)

別条件 : 微積分のモノイド での位相空間
(“局所座標系” を定める)

幾何学 A では 別条件上の微分論を扱う
(積分論は幾何学 D)

モデル化の1つ: "位相空間上の微分方程式" を定義して。

例: 地球上の気象変動を表す数理モデルを作り出す。

→ 「2次元球面上で"微分方程式"を考えた、
というモデルを考えよう。

→ そもそも2次元球面上の"微分方程式"の定義を
(数学者の仕事) きちんと与えておく必要がある。

◎ 何れも難い (110).

$$S^2 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \quad \text{とみる,}$$

S^2 上の関数 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を考える.

“ f の偏導関数” はどうやって定義する?

失敗例 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad \text{とみる.}$

↑

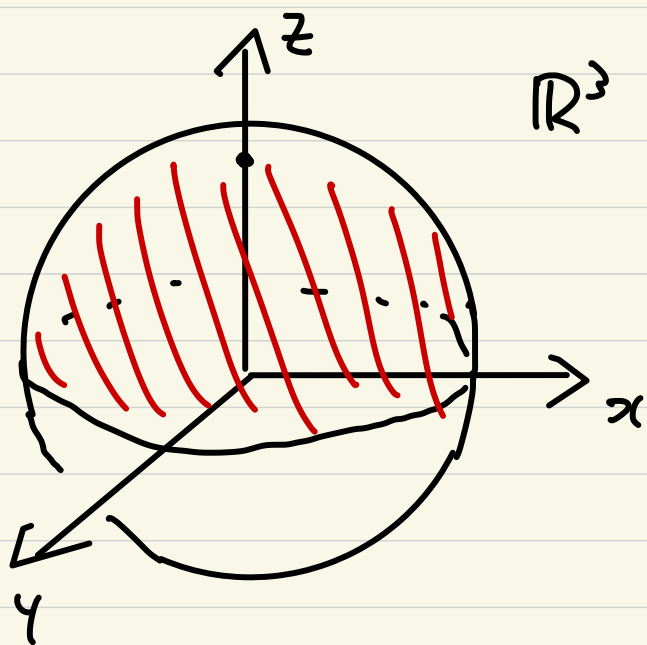
f は S^2 上でのみ定義してあるので

$f(x+h, y, z)$ は定義してない.

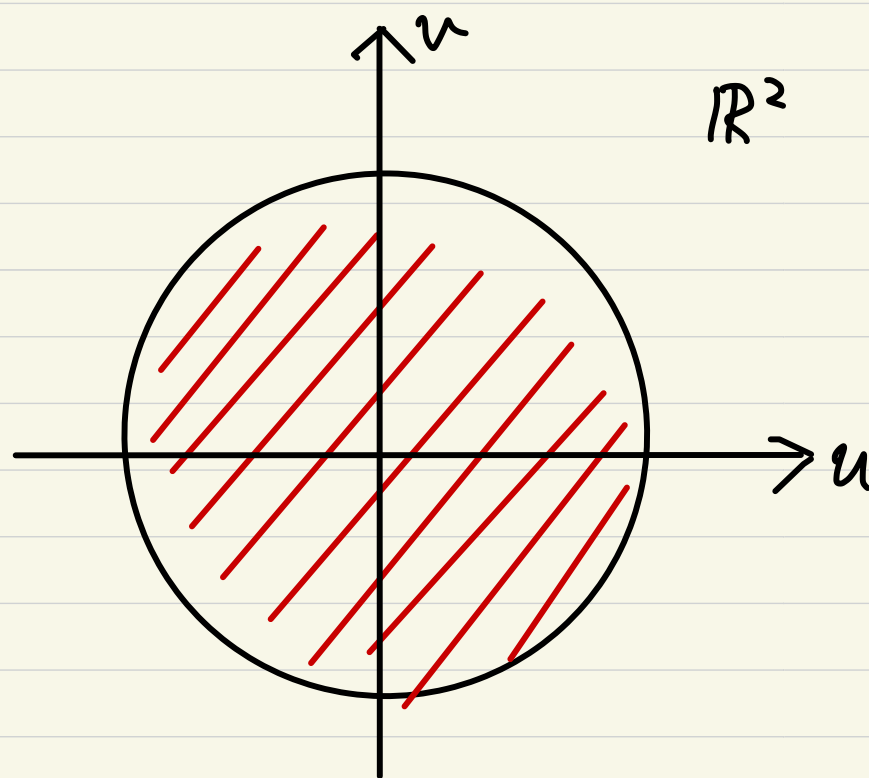
◎ アイデア

局所的に座標を与えよ (多様体論の中心的アイデア)

→ 局所的に偏導関数を定義できる。



同一視
→



この場合、北半球上で $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ を考えよとできる。

更に“ベクトル場”の概念を用いると
大域的に微分方程式を定義できる!

→ 大域幾何, 解析学の土台とほほ.

例: ド・ラーム理論 (空間の形と微分方程式の関係)

リーマン幾何, シンプレクティック幾何
(力学の土台)

対称空間上の調和解析など
(“波”の解析)

講義全体の流れ

Part I : 変数微分論を代数的に捉える。

Part II : 可微分群構造の定義, 構成

Part III : 可微分群構造上の各種概念

注意: Part I が最も難しい。

Part II は比較的やさしい。

時間と力については頭に入らばいい。

Part III は Part I, Part II が頭に入れば簡単

Section 1 終