Section 10：可微分多様体

意義：可微分多様体および
その上の C^∞ 級関数を定義する.

Part II：可微分多様体の定義，各種構成

Section 8：局所座標系
9：座標変換
10：可微分多様体
11：多様体の例
12：C^∞ 級関数の構成

内容

- C^∞級関数，C^∞級写像の局所性
- 極大 C^∞ atlas
- 極大 C^∞-atlas 上の C^∞級関数
- C^∞級多様体の定義
  (可微分多様体)

Section 10.1 : C^∞級関数, C^∞級写像の局所性

ユークリッド空間の開集合上の関数, 写像について,
"C^∞性"や局所的な性質であることを見る.
(Section 10.3 の準備)

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$.

Prop 10.1.1 : $\emptyset \neq U_0 \underset{\text{open}}{\subset} U$ とする.

制限

$\forall f \in C^\infty(U)$, $f|_{U_0} \in C^\infty(U_0)$

(実はこれまでもちょくちょく使っていた)

C^∞ 級関数の局所性

Prop 10.1.2 :

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: U の開被覆 with $U_\lambda \neq \emptyset$
$(\forall\lambda\in\Lambda)$

関数 $f : U \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(U)$

$\Updownarrow$

(ii) $\forall\lambda\in\Lambda,\ f|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$

Hint : (ii) $\Rightarrow$ (i) について

Lemma 9.3.4 , 帰納法

Cor 10.1.3

$f \in \mathbb{R}^U$ (U 上の $\mathbb{R}$ 値関数) について

以下は同値

(i) f は C^∞ 級関数 (i.e. $f \in C^\infty(U)$)

$\Updownarrow$

(ii)' $\forall p \in U$, $\exists U_p \subset U$: p の開近傍 s.t.

$$f|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$$

Hint : (ii)' $\Rightarrow$ (i) について

U の開被覆 $\{U_p\}_{p\in U}$ について (ii) in Prop 10.1.2 が成り立つ

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

Prop 10.1.4: $\emptyset \neq U_0 \underset{\text{open}}{\subset} U_1$ とする.

$\forall \varphi : U_1 \to U_2$: C^∞級写像,

$\varphi|_{U_0} : \underset{\cap\,\text{open}\ \mathbb{R}^{n_1}}{U_0} \to U_2$: C^∞級写像.

Hint: Prop 10.1.1 と以下の Lemma を用いよ.

Lemma 10.1.5

$\forall f \in C(U_2)$, $\varphi^*(f)|_{U_0} = (\varphi|_{U_0})^*(f)$

C^∞級写像の局所性

Prop 10.1.6

$\{U_{1,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U_1 の開被覆 with $U_{1,\lambda}\neq\emptyset$ $({}^\forall\lambda\in\Lambda)$ とする.

写像 $\varphi : U_1\to U_2$ について以下は同値.

(i) $\varphi : U_1\to U_2$ は C^∞級写像

$(\varphi$ は連続で, $\varphi^*(C^\infty(U_2))\subset C^\infty(U_1))$

$\Updownarrow$

(ii) 各 $\lambda\in\Lambda$ について $\varphi|_{U_{1,\lambda}} : U_{1,\lambda}\to U_2$ は C^∞級写像

Hint (ii) $\Rightarrow$ (i) について

Lemma 9.3.4, Prop 10.1.2, Lemma 10.1.5 を用いる.

Cor 10.1.7

写像 $\varphi: U_1 \to U_2$ について以下は同値．

(i) $\varphi: U_1 \to U_2$ は C^∞ 級写像

$\Updownarrow$

(ii)' ${}^\forall p \in U_1$, ${}^\exists U_{1,p} \subset U_1$: p の開近傍 s.t.

$$f|_{U_{1,p}}: U_{1,p} \to U_2 \text{ は } C^\infty \text{級写像}$$

Hint: (ii)' $\Rightarrow$ (i) について

U の開被覆 $\{U_p\}_{p \in U}$ について (ii) in Prop 10.1.3 が成り立つ

次の命題も使う

Prop 10.1.8 : $\emptyset \neq U_2' \underset{\text{open}}{\subset} U_2 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ とする.

写像 $\varphi : U_1 \to U_2'$ について以下は同値

(i) $\varphi : U_1 \to U_2'$ は C^∞ 級写像.

$\Updownarrow$

(ii) φ は U_1 から U_2 $\left(\underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}\right)$ への写像として C^∞ 級写像.

Hint : Prop 6.1.3, Prop 8.1.6 (1)

(定義から直接示すのは簡単でないので注意
cf. Prop 3.4.9)

Section 10.2 : 極大 C^∞-atlas

この節では 極大 C^∞-atlas を定義し、
("完全版"地図帳)
C^∞-atlas から構成する方法を述べる。

設定 : M : 空でない位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 :
$LC(M;\mathbb{R}^n)$: M の n 次元局所座標系全体の集合

Recall (Def. 9.3.1) :

$A_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ が M の C^∞-atlas

地図帳

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① $\bigcup_{(O,U,u)\in A_0} O = M$

Mのすべての地点をカバー

② $^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v) \in A_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$,

座標変換 $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O \cap O')$

$\cap$ open $\mathbb{R}^n$ $\cap$ open $\mathbb{R}^n$

は C^∞級写像

地図同士の整合性がとれている

極大 C^∞-atlas を以下で定義する.

"完全版"

Def 10.2.1:

M の C^∞-atlas $\mathcal{A} \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ が極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ となる C^∞-atlas $\mathcal{B} \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$

が存在しない

Remark: $LC(M;\mathbb{R}^n)$ そのものは一般には

C^∞-atlas になると限らない

(なる場合の方が珍しい)

Q： C^∞-atlas A_0 について，
それを含む極大 C^∞-atlas は存在する？

A： Yes !!
しかも そのような極大 C^∞-atlas は一意．

任意の地図帳は地図を追加して"完全版"にできる．

Def. 10.2.2 : M の C^∞-atlas $\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ について

$$[\mathcal{A}_0] := \left\{ (O,U,u) \in LC(M;\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall (O',V,v) \in \mathcal{A}_0 \text{ with } O \cap O' \neq \emptyset, \\ \text{座標変換 } \tau_{uv},\ \tau_{vu} \text{ は共に } C^\infty \text{級写像} \end{array} \right\}$$

$\subset LC(M;\mathbb{R}^n)$

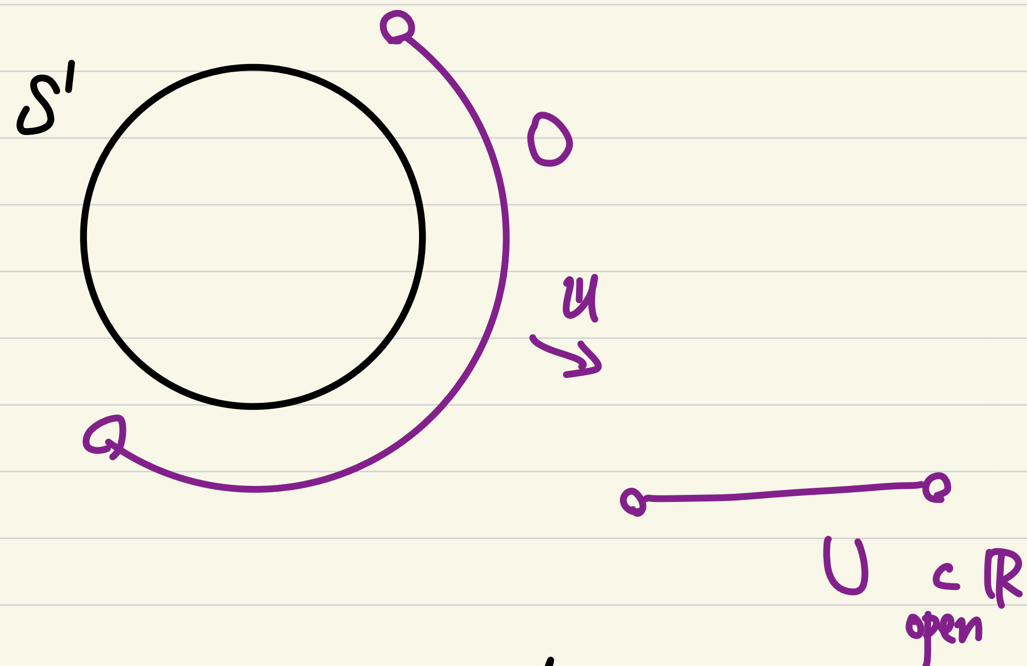
$\mathcal{A}_0$ の地図と整合性のとれるすべての地図を追加

Ex 10.2.3: Ex 9.3.6 の $n=1$ の場合について.

$O = \{x \in S^1 \mid x_1 > x_2\}$

$U = (-1, 1) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$$\psi : O \to U$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$



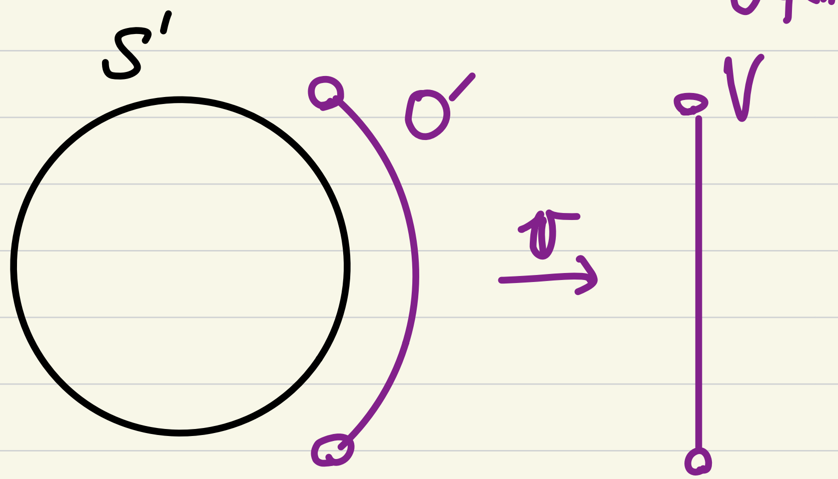
とすると $(O, U, \psi) \notin \mathcal{A}_0$ だが $(O, U, \psi) \in [\mathcal{A}_0]$

例:

$O' := \{ x \in S^1 \mid x_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \}$

$V := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$\psi : O' \to V,\ x \mapsto x_2$



とすると

$(O', V, \psi) \notin \mathcal{A}_0$ だが $(O', V, \psi) \in [\mathcal{A}_0]$.

Theorem 10.2.4: $\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$: M の C^∞-atlas とする.

このとき 以下が成り立つ

(1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$

(2) $[\mathcal{A}_0]$ は M の 極大 C^∞-atlas

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ のみ

これより

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める 極大 C^∞-atlas と呼ぶ.

Idea of Proof of Thm 10.2.4:

(1) は 定義から従う (要確認)

(2) を示す:

示 ① $[A_0]$ は C^∞-atlas

② $[A_0]$ は C^∞-atlas として極大

① を示す:

示 ㋑ $\bigcup_{(O,U,u)\in[A_0]} O = M$

　 ㋺ $[A_0]$ 内の座標変換は C^∞ 級

㋑ は (1) から従う (要確認)

㋺ を示す

示 ${}^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v)\in[A_0]$ with $O\cap O'\neq\emptyset$,

$\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$ は C^∞ 級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in [\mathcal{A}_0]$ を任意にとる.

示 $\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は

$u(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

C^∞級写像

Cor 10.1.5 より 以下を示せばよい

示 ${}^\forall p \in u(O \cap O'), {}^\exists U_p \subset u(O \cap O')$: p の開近傍

s.t. $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O')$

は C^∞級写像

$p \in u(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$ を任意にとる.

いま $\mathcal{A}_0$ は C^∞-atlas なので

$(\mathcal{O}_0, U_0, u_0) \in \mathcal{A}_0$ であって　$u^{-1}(p) \in \mathcal{O}_0$ ($\mathcal{O} \subset M$)

となるものをとれる.

ここで $U_p = u(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}_0) \underset{\text{open}}{\subset} U$ とおく.

($\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}_0$: pの開近傍 in M)

示 $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$ は C^∞級写像

Prop 9.1.5 より　U_p をいる　$\psi(O\cap O'\cap O_0)$ への写像として

$$\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}\big|_{U_p} = \left(\tau_{\mathfrak{u}_0\mathfrak{v}}\big|_{\mathfrak{u}_0(O\cap O'\cap O_0)}\right)\circ\left(\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}\big|_{\mathfrak{u}(O\cap O'\cap O_0)}\right)$$

$[A_0]$ の定義より　$\tau_{\mathfrak{u}_0\mathfrak{v}}$, $\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}$ は C^∞ 級写像

それらの制限

$$\tau_{\mathfrak{u}_0\mathfrak{v}}\big|_{\mathfrak{u}_0(O\cap O'\cap O_0)},\ \tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}\big|_{\mathfrak{u}(O\cap O'\cap O_0)}$$

も C^∞ 級写像

(cf. Prop 10.1.4)

特に 合成 $\tau_{\psi\psi}|_{U_p} : U_p \to \psi(O \cap O' \cap O_0)$ も

C^∞級写像

(cf. Thm 7.1.1)

((ロ)証明終)(①証明終)

② は $[A_0]$ の定義と (1) から従う(要確認)

((2)証明終)

(3) は「"A_0 を含む C^∞-atlas" は $[A_0]$ に含まれる」

ことから従う(要確認) ∎

次の命題は便利

Prop 10.2.5 $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ を
それぞれ M の C^∞-atlas とする.

以下は同値

(i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$

$\Updownarrow$

(ii) $^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $^\forall (O', V, v) \in \mathcal{B}_0$
with $O \cap O' \neq \emptyset$

T_{uv}, T_{vu} は共に C^∞ 級写像

Hint: Theorem 10.2.4

Ex 10.2.6 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする.

$(O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S) \in LS(S^n; \mathbb{R}^n)$

を以下のように定める.

$O_N := S^n \setminus \{(0,0,\dots,0,1)\}$ $O_S := S^n \setminus \{(0,0,\dots,0,-1)\}$

$V_N := \mathbb{R}^n$ $V_S := \mathbb{R}^n$

$$\psi_N : O_N \to V_N, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

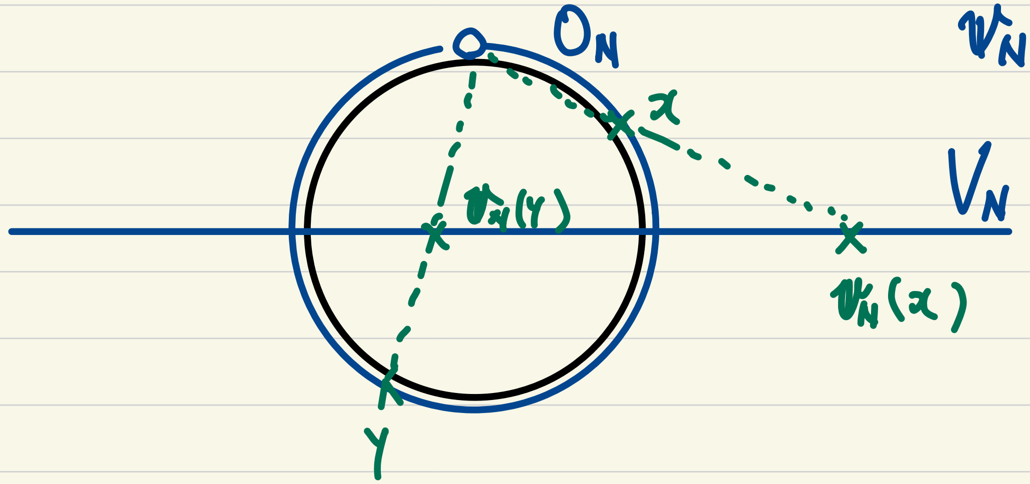
$$\psi_S : O_S \to V_S, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi_N^{-1} : V_N \to O_N \\ v \mapsto \left(\dfrac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \dots, \dfrac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \dfrac{-1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right) \end{array} \right)$$

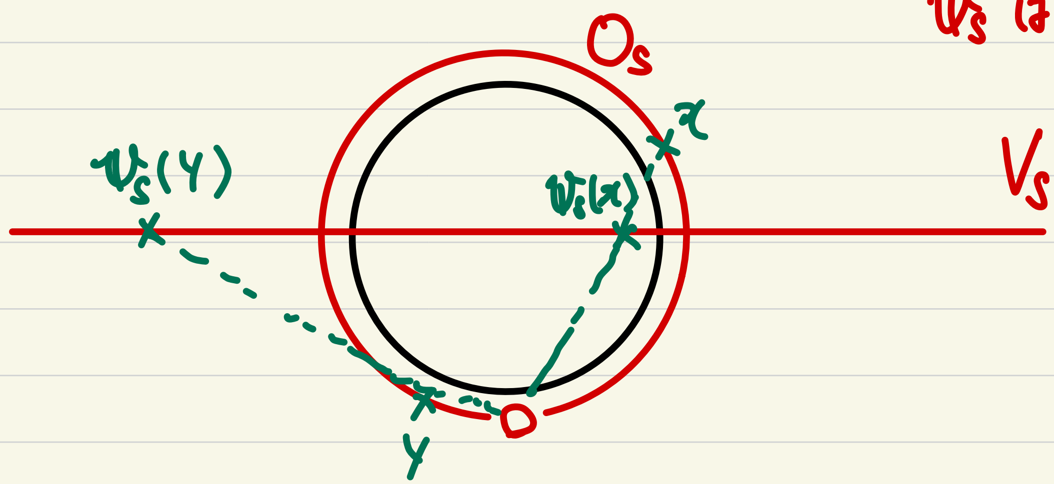
ψ_S^{-1} は省略

イメージ

$n=1$ のとき



ψ_N は"北極点"における立体射影



ψ_S は"南極点"における立体射影

このとき

$$\mathcal{B}_0 := \{ (O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S) \}$$

は S^n の C^∞-atlas とする.

また

$$\mathcal{A}_0 := \{ (O_k^\pm, U_k^\pm, \psi_k^\pm) \mid k = 1, \cdots, n+1 \}$$

を Ex 9.3.6 で扱った

S^n の C^∞-atlas とする.

Claim : $[\mathcal{B}_0] = [\mathcal{A}_0]$

$\mathcal{B}_0$の完全版　$\mathcal{A}_0$の完全版

Idea of Proof

Prop 10.2.5 より以下を示せばよい

示 $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0,\ \forall (O', V, v) \in \mathcal{B}_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞ 級写像

ここでは

$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$

$(O', V, v) = (O_N, V_N, v_N)$ の場合のみ紹介する.

このとき

$$O \cap O' = O_1^+ \cap O_N = \{x \in S^n \mid x_1 > 0,\ x \neq (0, 0, \cdots, 0, 1)\}$$

$$= \{x \in S^n \mid x_1 > 0\}$$

さらに $u(O\cap O') = u_1^+(\{x\in S^n \mid x_1>0\})$

$$= U_1^+ = \{u\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2<1\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$v(O\cap O') = v_N(\{x\in S^n \mid x_1>0\})$$

$$= \{v\in\mathbb{R}^n \mid v_1>0\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

また $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

$$\begin{array}{ccc} \{u\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2<1\} & & \{v\in\mathbb{R}^n \mid v_1>0\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ u & \longmapsto & \left(\frac{1-\sum_{i=1}^n u_i^2}{1-u_n}, \frac{u_1}{1-u_n}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{1-u_n}\right) \end{array}$$

これは C^∞級写像

(定義域注意)

$$\left((u_1^+)^{-1} \searrow \left(1-\sum_{i=1}^n u_i^2, u_1, \cdots, u_n\right) \nearrow v_N \right)$$

$$\tau_{vu} : \mathcal{V}(O \cap O') \to \mathcal{U}(O \cap O')$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_i > 0 \} \qquad \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \}$$

これは C^∞ 級写像

$$v \longmapsto \left(\frac{2v_2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right)$$

$$\left(\psi_N^{-1} \searrow \qquad \swarrow u_1^+ \right.$$

$$\left. \left(\frac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right) \right)$$

他の場合もがんばって計算すると

座標変換がいずれも C^∞ 級写像

であることがわかる. ∎

Section 10.3 極大 C^∞-atlas 上の C^∞ 級関数

設定：M：空でない位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$：$M$ の C^∞-atlas

記号：$[\mathcal{A}_0]$：$\mathcal{A}_0$ の定める M の極大 C^∞-atlas

(cf. Thm 10.2.4)

Recall (Def. 9.3.2):

$f \in C(M)$ が $[A_0]$ 上 C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall(O, U, u) \in [A_0]$, $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

Q: $[A_0]$ はものすごく大きい集合なので

完全版

check が大変なのでは…

A: A_0 だけ気にすれば OK!

オリジナル

Theorem 10.3.1: $f \in C(M)$ について以下は同値

(i) f は A_0 上 C^∞ 級

$\Updownarrow$

(ii) f は $[A_0]$ 上 C^∞ 級

特に $C^\infty(M; A_0) = C^\infty(M; [A_0])$

Proof: (ii) $\Rightarrow$ (i) は Thm 10.2.4 より従う.

(i) $\Rightarrow$ (ii) を示す.

(i) を仮定して (ii) を示す.

示 $^\forall(O, U, u) \in [A_0]$, $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

$(O, U, u) \in [A_0]$ を任意にとる.

示 $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

Cor (0.1.) より 以下を示せばよい

示 $\forall p \in U, \exists U_p \subset U$: p の開近傍 s.t.

$$(f \circ u^{-1})|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$$

$p \in U$ を任意にとる.

示 $\exists U_p \subset U$: p の開近傍

s.t $(f \circ u^{-1})|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$

$u^{-1}(p) \in O'$ となる $(O', V, \psi) \in A_0$ を固定

$u^{-1}(p) \in O \subset M$

（A_0 は M の C^∞-atlas なので このような
$(O', V, \psi) \in A_0$ は存在する）

$U_p = u(O \cap O') \subset U$ とおくと
U_p は p の開近傍 in U.

(示) $(f \circ u^{-1})|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$

$$f \circ u^{-1}|_{U_p} = f \circ (u|_{O \cap O'})^{-1}$$

[A_0] の定義と Thm 9.2.2 より 以下を示せば十分

示) $(f\circ(\psi|_{O\cap O'})^{-1}) \in C^\infty(\psi(O\cap O'))$

$$\begin{gathered} \| \\ (f\circ\psi)|_{\psi(O\cap O')} \end{gathered}$$

いま f は A_0 上 C^∞ 級なので

$$f\circ\psi^{-1} \in C^\infty(V)$$

特に Prop 10.1.1 より

$$(f\circ\psi^{-1})|_{\psi(O\cap O')} \in C^\infty(\psi(O\cap O'))$$

∎

C^∞性のチェックに便利な命題

Prop. 10.3.2：$\mathcal{A}$ を M の極大 C^∞-atlas とする。

関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

(ii) $\forall p \in M,\ ^\exists(O, U, u) \in \mathcal{A},\ ^\exists O_p \subset O$：$p$の開近傍

$$\text{s.t. } (f \circ u^{-1})|_{u(O_p)} \in C^\infty(\underbrace{u(O_p)}_{\text{open} \subset \mathbb{R}^n})$$

Hint：$\mathcal{A}_0 := \{(O_p, u(O_p), u|_{O_p}) \mid p \in M\}$ とおくと

$\mathcal{A}_0 \subset LC(M; \mathbb{R}^n)$ かつ $[\mathcal{A}_0] = \mathcal{A}$

Section 10.4：C^∞級多様体の定義

Def. 10.4.1：Mを空でない位相空間，

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とする．

$\mathcal{A}$をMの極大C^∞-atlasとする．

可微分多様体，
滑らかな多様体
とも呼ぶ

組$(M, \mathcal{A})$がn次元C^∞級多様体である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① Mはハウスドルフ

かつ

← C^∞級関数が豊富に
存在することを保障
(cf. Section 12)

② Mは第二可算公理を満たす

(i.e. 可算開基を持つ)

← 積分論
に必要
(cf. 幾何学D)

ヘウスドルフ，第二可算

Ex 10.4.2

$\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 U について

$(U, U, \mathrm{id}_U) \in LC(U; \mathbb{R}^n)$ (Ex 8.2.2)

$\mathcal{A}_0 := \{(U, U, \mathrm{id}_U)\}$ は U の C^∞-atlas.

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas とする.

このとき $(U, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体.

また $C^\infty(U; [\mathcal{A}_0]) = C^\infty(U)$.

Section 3 で定義したもの

(面白くない例)

Ex 10.4.3

← ハウスドルフ, 第二可算

$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について

$\mathcal{A}_0 := \{ (O_k^{\pm}, U_k^{\pm}, \psi_k^{\pm}) \mid k = 1, \cdots, n+1 \}$

を Ex 9.3.6 で扱った S^n の C^∞-atlas とする.

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas とする. ← Ex 10.2.6 の $\mathcal{B}_0$ から作っても同じものができる.

このとき $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体.

$[\mathcal{A}_0]$ を決めたおかげで $C^\infty(S^n; [\mathcal{A}_0])$ が定義できる!

これからやる事

- C^∞級多様体の例の紹介
- $C^\infty(M;A)$を調べる。

Part I

- 接空間，接ベクトル，ベクトル場
- C^∞級写像，写像の微分
- 部分多様体

Part II

Section 10.4 終