Section 11 : 正則部分多様体

意義 : 多様体の例として,
ユークリッド空間の正則部分多様体を紹介

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 8 : 局所座標系
9 : 座標変換
10 : 可微分多様体
11 : 正則部分多様体 ☆
12 : 射影空間
13 : C^∞級関数の構成

内容

- グラフ多様体
- 正則局所座標系 in $\mathbb{R}^{n+k}$
- $\mathbb{R}^{n+k}$ の正則部分多様体
- 正則点の逆像として得られる多様体

Section 11.1：グラフ多様体

設定：$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$：空でない開集合

$\varphi : U \to \mathbb{R}^k$：$C^\infty$級写像

記号：$S_\varphi := \{ (u, \varphi(u)) \mid u \in U \} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

（φのグラフ）

Prop 11.1.1: $u : S_\varphi \to U \subset \mathbb{R}^n$

$(x_1, \cdots, x_{n+k}) \mapsto (x_1, \cdots x_n)$

は同相写像.

特に $(S_\varphi, U, u) \in LC(S_\varphi : \mathbb{R}^n)$

更に $A_0 := \{(S_\varphi, U, u)\}$ は S_φ の C^∞-atlas.

$(S_\varphi, [A_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体.

グラフ多様体

Prop 11.1.2

$S_\varphi \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ とする.

このとき $\forall f \in C^\infty(D)$, $f|_{S_\varphi} \in C^\infty(S_\varphi; [A_0])$

Proof of Prop 11.1.2

$f \in C^\infty(D)$ を任意にとる．

㊟ $f|_{S_\varphi} \in C^\infty(S_\varphi ; [A_0])$

Thm 10.3.1 より 以下を示せばよい

㊟ $f|_{S_\varphi} \in C^\infty(S_\varphi ; A_0)$

i.e. $(f|_{S_\varphi}) \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

ここで

$$\tilde{\varphi} : U \to D, \quad u \mapsto (u, \varphi(u))$$

とおくと，

$\tilde{\varphi}$ は C^∞ 級写像 ($\because$ Prop 6.1.3)

であり,

$$u^{-1} : U \to S_\varphi, \quad u \mapsto (u, \varphi(u))$$

に注意すると

$$f|_{S_\varphi} \circ u^{-1} = f \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^*(f) \in C^\infty(U)$$

$\blacksquare$

Ex 11.1.3 $n=2,\ k=1,$

$$U = \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 < 1 \} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

$$\varphi : U \to \mathbb{R},\quad u \mapsto \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}$$ とおく.

このとき

$$S_\varphi = \{ (u, \varphi(u)) \mid u \in U \}$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \} \subset \mathbb{R}^3$$

S_φ

Claim: $h: S_\varphi \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$

は $(S_\varphi, [A_0])$ 上 C^∞ 級

グラフ多様体

Proof $D := \mathbb{R}^3$,

$f: D \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3$

とおくと, $f \in C^\infty(D)$ かつ $f|_{S_\varphi} = h$

より $h \in C^\infty(S_\varphi; [A_0])$ ($\because$ Prop 11.1.2) $\blacksquare$

Section 11.1 終

§11.2 : 正則局所座標系 in $\mathbb{R}^{n+k}$

設定 ; $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^{n+k}$: openとは限らない

($\mathbb{R}^{n+k}$の標準位相の定める相対位相によりSを位相空間とみなす.)

この節では S の n次元"正則局所座標系"の定義を与える.

$\underset{\mathbb{R}^{n+k}}{\cap}$

記号：

$LC(S;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, u) \mid S$ 上の n 次元局所座標系$\}$

$\mathbb{R}^n := \{(u_1, \cdots, u_n, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid u_i \in \mathbb{R}\}$

$\subset \mathbb{R}^{n+k}$

線型部分空間とみなす。

言葉の準備

Def 11.2.1

$\tilde{O}, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$: 空でない開集合とする.

全単射写像 $\phi : \tilde{O} \to \hat{U}$ が C^∞ 級微分同相

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\phi : \hat{O} \to \hat{U}$ と 逆写像 $\phi^{-1} : \hat{U} \to \tilde{O}$

が 共に C^∞ 級写像

正則局所座標系の定義

すごく使いやすい

Def. 11.2.2 : $(O, U, u) \in LC(S;\mathbb{R}^n)$ が正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$, $\exists\, \tilde{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$

$\exists\, \phi : \tilde{O} \to \tilde{U}$: C^∞級微分同相

s.t.
$$\begin{cases} \tilde{O} \cap S = O \\ \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U \\ \phi|_O = u \text{ on } O \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{n+k}$の部分集合とみなしている

Ex 11.2.3　Prop 11.1.1 の設定において

$(S_\varphi, U, u) \in \mathcal{LC}(S_\varphi ; \mathbb{R}^n)$ は正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$

Hint: $\tilde{O} = U \times \mathbb{R}^k \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$

$\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^k \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$

$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U},\quad (\underset{U}{\overset{\cup}{x}}, \underset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cup}{y}}) \mapsto (x, y - \varphi(x))$

$\phi^{-1} : \tilde{U} \to \tilde{O},\quad (\underset{U}{\overset{\cup}{u}}, \underset{\mathbb{R}^k}{\overset{\cup}{w}}) \mapsto (u, w + \varphi(u))$

とおけばよい.

Ex 11.2.4 : Ex 8.2.3 で与えた

$(O, U, u) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ は正則

Hint : $k=1$

← 円柱の一部

$$\tilde{O} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1,\ x_{n+1} > 0 \right\}$$

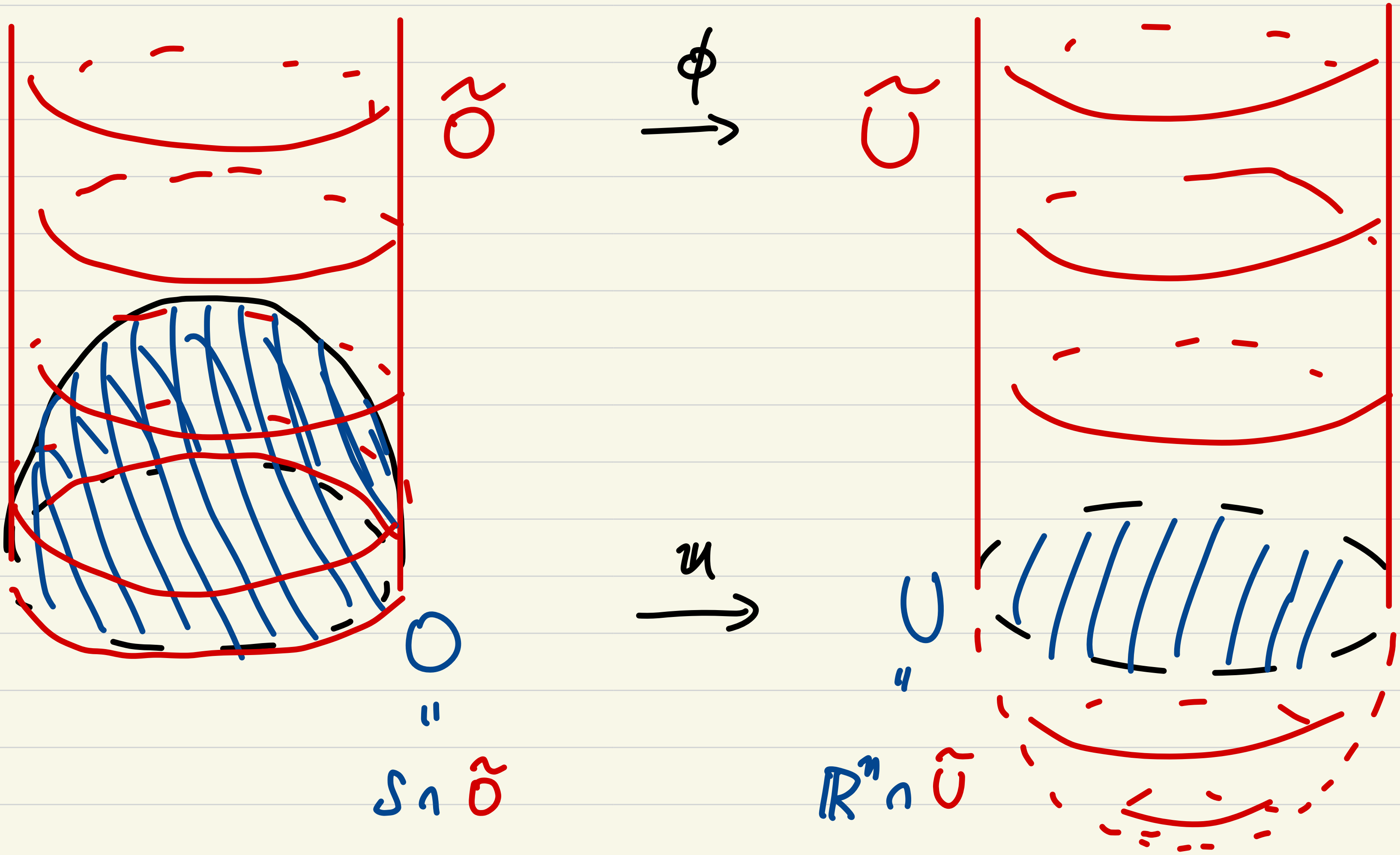
$$\tilde{U} := \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ u_{n+1} + \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2} > 0 \right\}$$

$$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U},\quad x \mapsto \left(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} - \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

$$\phi^{-1} : \tilde{U} \to \tilde{O},\quad u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, u_{n+1} + \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

とおけばよい

イメージ


$\tilde{O}$
ϕ
$\tilde{U}$
u
O
U
$\shortparallel$
$S \cap \tilde{O}$
$\shortparallel$
$\mathbb{R}^n \cap \tilde{U}$

次の2つの定理がとても便利

Theorem 11.2.5: $(O, U, u) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$: 正則とする.

また $S \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$, $f \in C^\infty(D)$ とする.

このとき $f|_S \in C^\infty(S; (O, U, u))$

Theorem 11.2.6 $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n)$ が共に正則かつ $O \cap O' \neq \emptyset$ とする.

このとき

座標変換 $\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞ 級写像

Thm 11.2.5 の Hint : 示したい $f|_S \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

$\tilde{O} \subset D$ のとき :

まず $(\underset{C^\infty 級}{\phi^{-1}})^*(f) \in C^\infty(\hat{U})$.

包含写像 $\iota : U \hookrightarrow \hat{U}$ は C^∞ 級写像

(∵ Prop 6.1.3)

このとき

$$f|_S \circ u^{-1} = \iota^*\left((\phi^{-1})^*(f)\right) \in C^\infty(U)$$

が言える.

一般のとき: $\hat{O} \cap D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ に注目する.

$\boxtimes$

Thm 11.2.6 の Hint

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{U} & \tilde{O} \arrow[l, "\tilde{\varphi}"'] & & \tilde{O}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}'"] & \tilde{U}' \\
\tilde{\varphi}(\tilde{O} \cap \tilde{O}') \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & & \tilde{O} \cap \tilde{O}' \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[ll, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[rr, "\tilde{\varphi}'"] & & \tilde{\varphi}'(\tilde{O} \cap \tilde{O}') \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \\
\tilde{\varphi}(\tilde{O} \cap \tilde{O}') \cap \mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & & S \cap (\tilde{O} \cap \tilde{O}') \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ll, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[rr, "\tilde{\varphi}'"] & & \tilde{\varphi}'(\tilde{O} \cap \tilde{O}') \cap \mathbb{R}^n \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \\
u(O \cap O') \arrow[u, phantom, sloped, "="] & & O \cap O' \arrow[u, phantom, sloped, "="] \arrow[ll, "u"'] \arrow[rr, "v"] & & v(O \cap O') \arrow[u, phantom, sloped, "="]
\end{tikzcd}
$$

Section 11.2
終

Section 11.3 : $\mathbb{R}^{n+k}$ の正則部分多様体

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^{n+k}$: open とは限らない

($\mathbb{R}^{n+k}$ の標準位相の定める相対位相により S を位相空間とみなす.)

Sについての以下の条件を考える:

条件 R_n : $\forall p \in S$, $\exists (O, U, u) \in LC(S; \mathbb{R}^n)$

s.t. (O, U, u) は正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$ かつ $p \in O$.

Theorem 11.3.1

S が ※$_n$ を満たすとする.

このとき $A^n_{reg} := \{ (O, U, u) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, u)$ は正則 in $\mathbb{R}^{n+k} \}$

は S 上の n 次元 C^∞-atlas

特に $(S, [A_{reg}])$ は n 次元 C^∞ 級多様体

Def 11.3.2

: このような $(S, [A^n_{reg}])$ を

$\mathbb{R}^{n+k}$ の n 次元正則部分多様体という.

Ex 11.3.3

グラフ多様体は正則部分多様体

Prop 11.3.4 S が Ⓐ$_n$ を満たすとする.

$S \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$, $f \in C^\infty(D)$ とする.

このとき $f|_S \in C^\infty(S, [A^n_{rg}])$

Hint: Thm 10.3.1, Thm 11.2.5

Section 11.3 終

Section 11.4：正則点の逆像として得られる多様体

設定：$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$D \subset \mathbb{R}^{n+k}$：空でない開集合

$\Psi : D \to \mathbb{R}^k$：$C^\infty$級写像

Def 11.4.1

$q \in \mathbb{R}^k$ が φ の臨界値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists p \in D$ s.t.

$\varphi(p) = q$ かつ

$(d\varphi)_p : T_p D \to T_q \mathbb{R}^k$

が全射でない

Def 11.4.2

$q \in \mathbb{R}^k$ が 正則値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $q \in \varphi(D)$ かつ

q は φ の 臨界値 でない

(i.e. $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$,

$(d\varphi)_p : T_p D \to T_q \mathbb{R}^k$

が 全射)

$(J\varphi)_p \in M(n+k, k ; \mathbb{R})$ のランクが k $\overset{\text{Thm 6.3.2}}{\Longleftrightarrow}$

Theorem 11.4.3 :

$q \in \mathbb{R}^k$ を Ψ の正則値とする.

$S_q := \underbrace{\Psi^{-1}(\{q\})}_{\neq \emptyset} \subset D \subset \mathbb{R}^{n+k}$ とおく.

このとき

S_q は 条件 $\circledast_n$ を満たす.

特に $(S_q[A^n_{reg}])$ は n 次元正則部分多様体 in $\mathbb{R}^{n+k}$

Thm 11.4.3 のアイデア

$p \in S_q$ を任意にとる.

示 $\exists (O, U, \varphi) \in LC(S_q; \mathbb{R}^n)$

s.t. 正則 in $\mathbb{R}^{n+k}$ かつ $p \in O$.

いま $(d\varphi)_p : T_p D \to T_q \mathbb{R}^k$ は全射

($\because$ q は正則値)

特に $(J\varphi)_p \in M(n+k, k; \mathbb{R})$ は rank k

← $(d\varphi)_p$ の表現行列 (Thm 6.3.2)

以下 $n=2$, $k=1$ のときのみ考える (一般のときも同様)

rank $(J\varphi)_p$ のランクは 2 なので

$(J\varphi)_p$ の $\{1,2\} \times \{1,2\}$ 小行列
$\{2,3\} \times \{1,2\}$ 小行列 のいずれかは
$\{1,3\} \times \{1,2\}$ 小行列 は正則.

Case I : $(J\varphi)_p$ の $\{1,2\}\times\{1,2\}$ 小行列が正則

のとき.

このとき 陰関数定理 より

(要確認)

$p \in {}^{\exists}\Omega \underset{\text{open}}{\subset} D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^3$, ${}^{\exists}U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$,

${}^{\exists}\varphi : U \to \mathbb{R}$: C^∞級写像 s.t.

$\{(u_1, u_2, \varphi(u_1, u_2)) \mid (u_1, u_2) \in U\} = \Omega \cap S$ in $\mathbb{R}^3$

(p のまわりで S をグラフ表示できる!)

ここで

$$p \in O := S \cap \Omega \underset{\text{open}}{\subset} S$$

$$u : O \to U, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

とおけば (O, U, u) が求めるものになる.

Hint: $\tilde{O} := \Omega \cap \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in U \}$

$$\tilde{U} := \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (u_1, u_2) \in U, \\ (u_1, u_2, u_3 + \varphi(u_1, u_2)) \in \tilde{O} \end{array} \right\}$$

$$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3 - \varphi(x_1, x_2))$$

とおくと正則 in $\mathbb{R}^3$ であることが示せる

Case II: $(J\varphi)_p$ の $\{2,3\}\times\{1,2\}$ 小行列 が 正則

のとき.

このとき 陰関数定理 より

$p \in {}^{\exists}\Omega \underset{\text{open}}{\subset} D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^3$, ${}^{\exists}U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$,

${}^{\exists}\varphi : U \to \mathbb{R}$: C^∞級写像 s.t.

$\{(\varphi(u_2,u_3), u_2, u_3) \mid (u_2,u_3)\in U\} = \Omega \cap S$ in $\mathbb{R}^3$

(p のまわりで S をグラフ表示できる!)

ここで

$$p \in O := S \cap \Omega \underset{\text{open}}{\subset} S$$

$$u : O \to U, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3)$$

とおけば (O, U, u) が求めるものになる.

Hint: $\tilde{O} := \Omega \cap \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_2, x_3) \in U \}$

$\tilde{U} := \{ (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (u_2, u_3) \in U,$

$(u_1 + \varphi(u_2, u_3), u_2, u_3) \in \tilde{O} \}$

$$\phi : \tilde{O} \to \tilde{U}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - \varphi(x_2, x_3), x_2, x_3)$$

とおくと 正則 in $\mathbb{R}^{mk}$ であることを示せ.

Case III $(J\varphi)_p$ の $\{1,3\}\times\{1,2\}$ 小行列が正則

のとき

Case I, II と同様.

図

Ex 11.4.4

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする.

$k = 1$, $D = \mathbb{R}^{n+1}$

$\varphi : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ (C^∞級)

$q = 1$

とすると $S^n = S_q := \{ x \in D \mid \varphi(x) = q \}$.

Claim q は φ の正則値

Proof: $p \in S_q$ を任意にとる.

(示) $\mathrm{rank}(J\varphi)_p = 1$

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) \right)_{i=1,\cdots,n+1} \in M(n+1, 1; \mathbb{R})$$

$$= \left(2p_1 \quad 2p_2 \quad \cdots \quad 2p_{n+1} \right)$$

いま $\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = 1$ より $(p_1, \cdots, p_{n+1}) \neq (0, \cdots, 0)$

特に $(J\varphi)_p$ のランク $= 1$ ∎

Claim と Thm 11.4.3 より

$$S^n = S_q \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

は条件 $\otimes_n$ を満たす.

特に $(S^n, [A^n_{reg}])$ は

n 次正則部分多様体 in $\mathbb{R}^{n+1}$

Ex 9.3.6 で紹介した C^∞-atlas $\mathcal{A}_0$ on S^n について

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}$ が成り立つ.

特に $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}]$.

つまり Ex 10.3.4 の

C^∞ 級多様体 $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ は

$\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元正則部分多様体

特に $S^n \subset D \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1}$

$f \in C^\infty(D)$ とすると

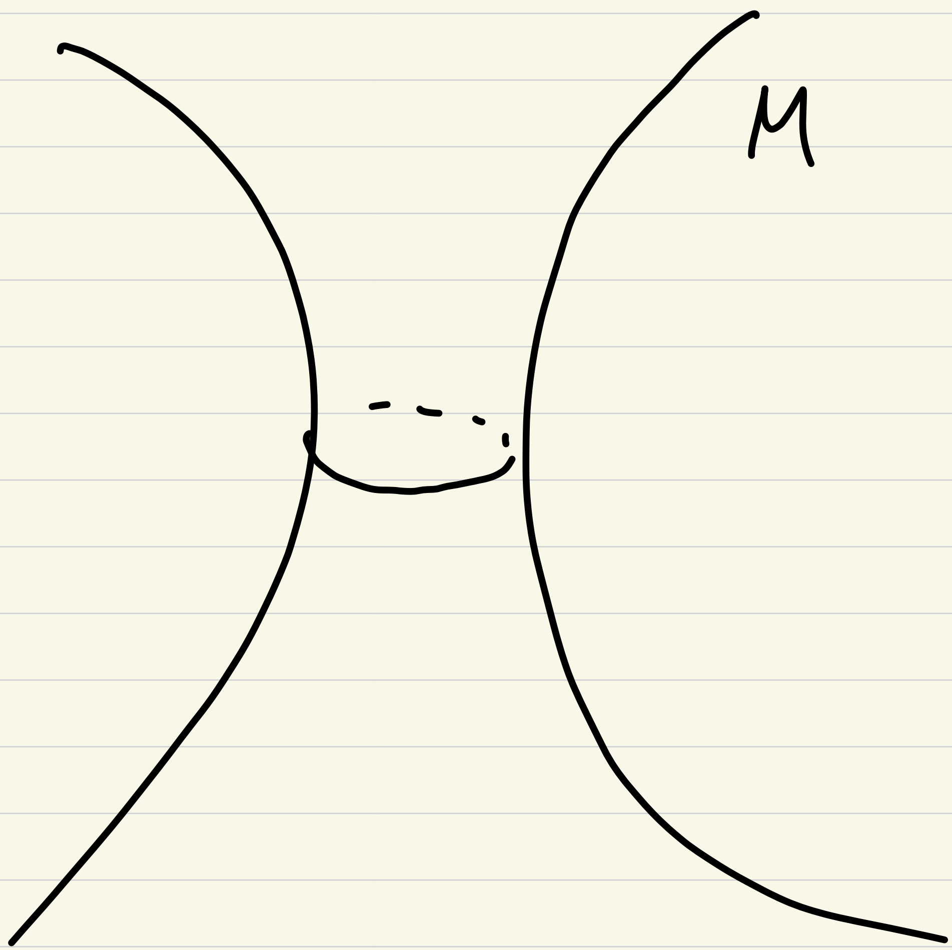
$$f|_{S^n} \in C^\infty(S^n; [A_0])$$

$(\because$ Prop 11.3.4 $)$

Ex 11.4.5

$M = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$

とおく



このとき

$$k = 1$$

$$D = \mathbb{R}^3$$

$$\varphi : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad (C^\infty級)$$

$$q = 1$$ とおくと

$$M = S_q := \{ x \in D \mid \varphi(x) = q \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Claim q は φ の正則点,

Proof : $p \in S_q$ を任意にとる.

示 $\operatorname{rank}(J\varphi)_p = 1$

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) \right)_{i=1,2,3} \in M(3,1;\mathbb{R})$$

$$= \begin{pmatrix} 2p_1 & 2p_2 & -2p_3 \end{pmatrix}$$

いま $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 1$ より $(p_1, p_2, p_3) \neq (0,0,0)$

特に $(J\varphi)_p$ のランク $= 1$ ∎

Claim と Thm 11.4.3 より

$M = S_q \subset \mathbb{R}^3$

は条件 $(\otimes)_2$ を満たす.

特に $(M, [A^2_{reg}])$ は

2次正則部分多様体 in $\mathbb{R}^3$

Section 11.4
終