Section 12：射影空間

意義：多様体の例として射影空間を紹介

Part II：可微分多様体の定義，各種構成

Section 8：局所座標系

9：座標変換

10：可微分多様体

11：正則部分多様体

12：射影空間 ☆

13：C^∞級関数の構成

内容

◎ 射影空間の定義

◎ 射影空間の多様体構造

Section 12.1：射影空間の定義

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 12.1.1：

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ における同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } y = \lambda x$$

として定める.

Def 12.1.2 :

$\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の $\sim$ による商空間を

(i.e. 商集合に商位相を定めたもの)

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) := (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$$

と書き、n 次元射影空間とよぶ。

$\mathbb{R}P^n$ とも書く

@ $P(\mathbb{R}^{n+1})$ はユークリッド空間の部分集合とは考えない。

Prop 12.1.3 :

コンパクト

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ は ハウスドルフ かつ 第二可算公理 を満たす.

この命題は自明ではない.

Hint となる命題をいくつか挙げておく.

Prop 12.1.4

商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ は開写像

Prop 12.1.5

X を位相空間とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする.

また商写像 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像であるとする.

このとき以下の条件は同値

(i) $\{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ が $X \times X$ 内の閉集合

(ii) $X/\sim$ はハウスドルフ.

Prop 12.1.6

X を位相空間とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする.

また商写像 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像であるとする.

このとき X が第二可算公理を満たすなら,

$X/\sim$ も第二可算公理を満たす.

記号：各 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$[x] := \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^{\times}\} \in P(\mathbb{R}^{n+1})$$ とおく.

x の同値類

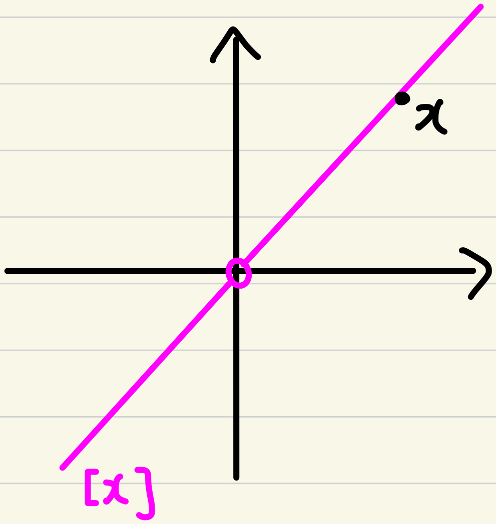
$[x] = [(x_1, \cdots, x_n)]$ を $[x_1 : x_2 : \cdots : x_n]$ とも書く.

$\in P(\mathbb{R}^{n+1})$

($[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : y_2 : \cdots : y_{n+1}]$

$\iff {}^{\exists}\lambda \in \mathbb{R}^{\times}$ s.t. $\lambda x_1 = y_1, \cdots, \lambda x_{n+1} = y_{n+1}$

に注意.)



Prop 12.1.7

$$\begin{array}{ccc} P(\mathbb{R}^{n+1}) & \to & \{\mathbb{R}^{n+1}\text{の1次元部分空間}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x] & \mapsto & [x]\cup\{0\} \end{array}$$

は全単射

Remark:

集合$\{\mathbb{R}^{n+1}$の1次元部分空間$\}$に自然な位相を入れたものが$P(\mathbb{R}^{n+1})$であると思ってよい。

Section 12.1 終

Section 12.2 : 射影空間の多様体構造

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 :

$LC(P(\mathbb{R}^{n+1}) ; \mathbb{R}^n)$:

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ の n 次元局所座標系全体の集合

Remark : $P(\mathbb{R}^{n+1})$ はユークリッド空間の部分集合と思っていないので局所座標系の"正則"や否やの定義はない.

Ex 12.2.1 : 各 $i = 1, \cdots, n+1$ について

$$O_i := \{ [x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}, \ x_i \neq 0 \}$$

$$U_i := \mathbb{R}^n$$

← x_i をスキップする.

$$u_i : O_i \to U_i, \quad [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots \overset{x_i}{\vee} \cdots, x_{n+1})$$

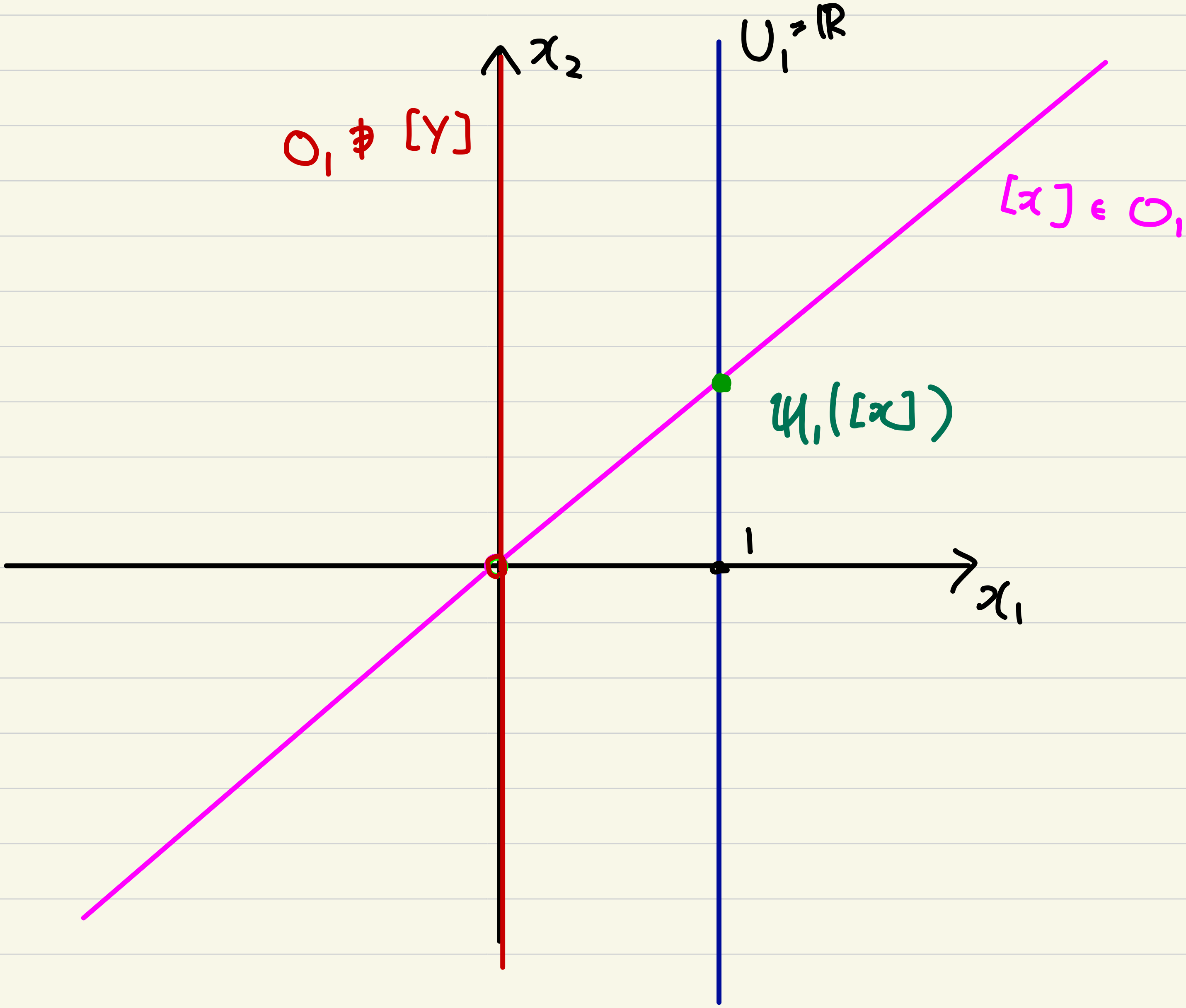
$$\| $$

$$\frac{1}{x_i}(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

とおくと $(O_i, U_i, u_i) \in LC(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$.

(Hint: $(u_i)^{-1} : U_i \to O_i, \ u = (u_1, \cdots u_n) \mapsto [u_1, \cdots u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_n]$)

$n = 1$ の場合のイメージ



Prop 12.2.2

$\mathcal{A}_0 := \{ (O_i, U_i, u_i) \mid i = 1, \cdots, n+1 \}$

は $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の C^∞-atlas

特に $(P(\mathbb{R}^{n+1}), [\mathcal{A}_0])$ は n次元C^∞級多様体

Proof

(示) ① $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i = P(\mathbb{R}^{n+1})$

② $\mathcal{A}_0$内の座標変換はC^∞級写像

① について

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \subset P(\mathbb{R}^{n+1})$$ は定義より明らか.

(示) $$\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset P(\mathbb{R}^{n+1})$$ i.e. $\forall \omega \in P(\mathbb{R}^{n+1}), \exists i = 1, \cdots, n+1$ s.t. $\omega \in O_i$

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ の元 ω を任意にとる.

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ の定義より $\exists x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ s.t. $\omega = [x]$.

この x について $x \neq 0$ より $x_i \neq 0$ となる $i = 1, \cdots, n+1$ が存在する.

この i について $[x] \in O_i$

①証明終

② について

$1 \leq i \lneq j \leq n+1$ とする.

(O_i, U_i, u_i) から (O_j, U_j, u_j) への座標変換を簡単のため

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{ij} : & u_i(O_i \cap O_j) & \longrightarrow & u_j(O_i \cap O_j) & \text{と書く.} \\ & \| & & \| & \\ & \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_{j-1} \neq 0\} & & \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_i \neq 0\} & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & u & \xmapsto[\tau_{ij}]{} & \frac{1}{u_{j-1}}(u_1, \cdots, u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_{j-2}, u_j, \cdots, u_n) & \end{array}$$

τ_{ij} は C^∞-級

(ほぼ同様に τ_{ji} も C^∞-級)

② 証明終

Section 12.2 終

図