Section 13 : C^∞級関数の構成

意義 : C^∞級多様体は C^∞級関数をたくさん持っていることをみる.

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 8 : 局所座標系
9 : 座標変換
10 : 可微分多様体
11 : 正則部分多様体
12 : 射影空間
13 : C^∞級関数の構成

内容

- 開部分多様体
- C^∞級関数の延長

Section 13.1 開部分多様体

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$(M, \mathcal{A})$: n次元C^∞級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

この節では Ω に多様体構造を定めます.

Prop 13.1.1

$$\mathcal{LC}(\Omega;\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$$

$$\| $$

$$\{ (O, U, u) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) \mid O \subset \Omega \}$$

Theorem 13.1.2

$\mathcal{A}_\Omega := \mathcal{A} \cap \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n)$

は Ω の極大 C^∞-atlas

特に $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は n 次元 C^∞ 級多様体

Def 13.1.3

$(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ を $(M, \mathcal{A})$ の開部分多様体という.

Theorem 13.1.2 a Hint :

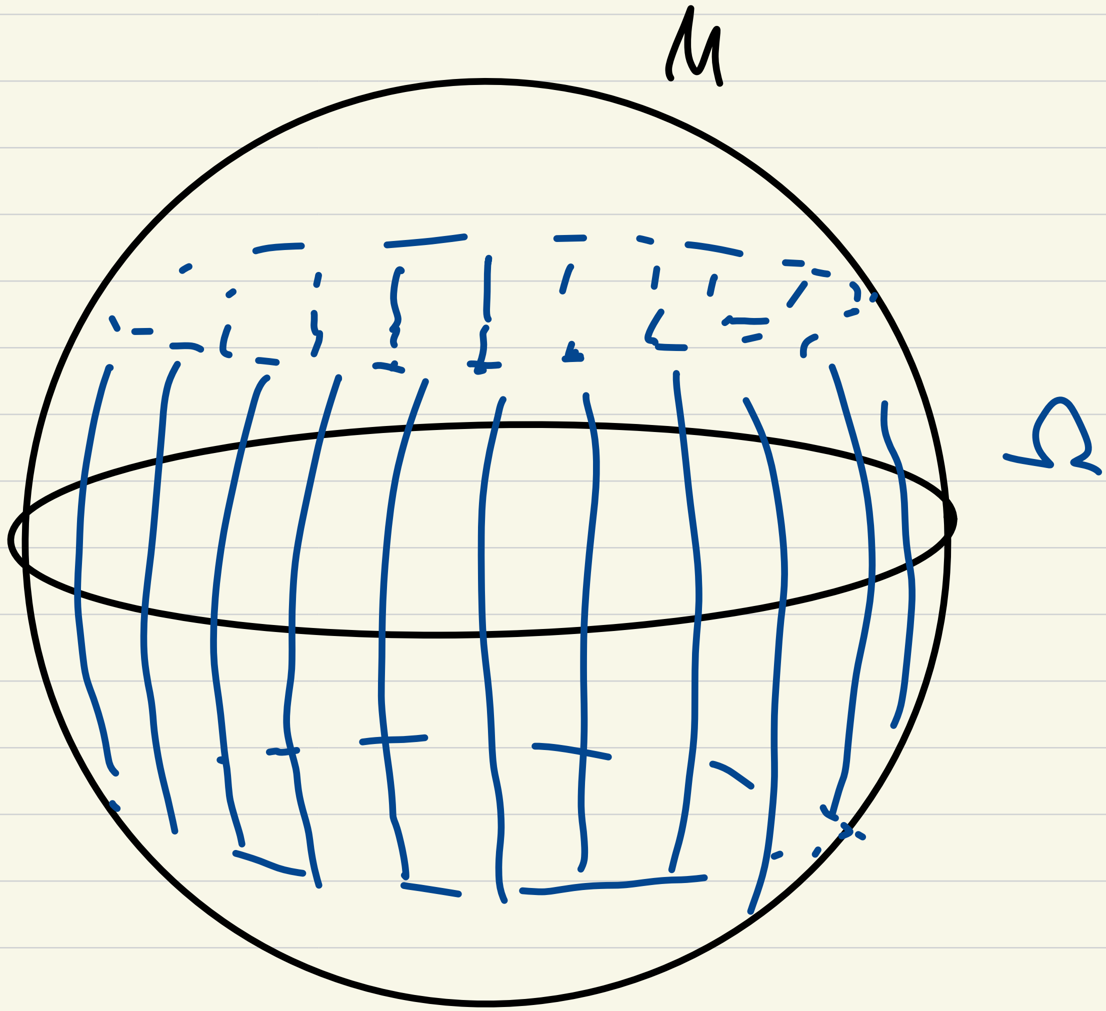
Lemma 13.1.4

$\forall\ (O, U, \mathfrak{u}) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ with $O \cap \Omega \neq \emptyset$,

$(O \cap \Omega,\ \mathfrak{u}(O \cap \Omega),\ \mathfrak{u}|_{O \cap \Omega}) \in LC(\Omega; \mathbb{R}^n)$

(Hint : Prop 8.2.4)

Ex 13.1.5



Prop 13.1.6

$\forall f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$,

$$f|_\Omega \in C^\infty(\Omega; \mathcal{A}_\Omega)$$

Section 13.1 終

Section 13.2 : C^∞級関数の延長

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$(M, \mathcal{A})$: n次元C^∞級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

記号 : $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$: 開部分多様体

Question :

写像 rest : $C^\infty(M;A) \to C^\infty(\Omega;A_\Omega)$

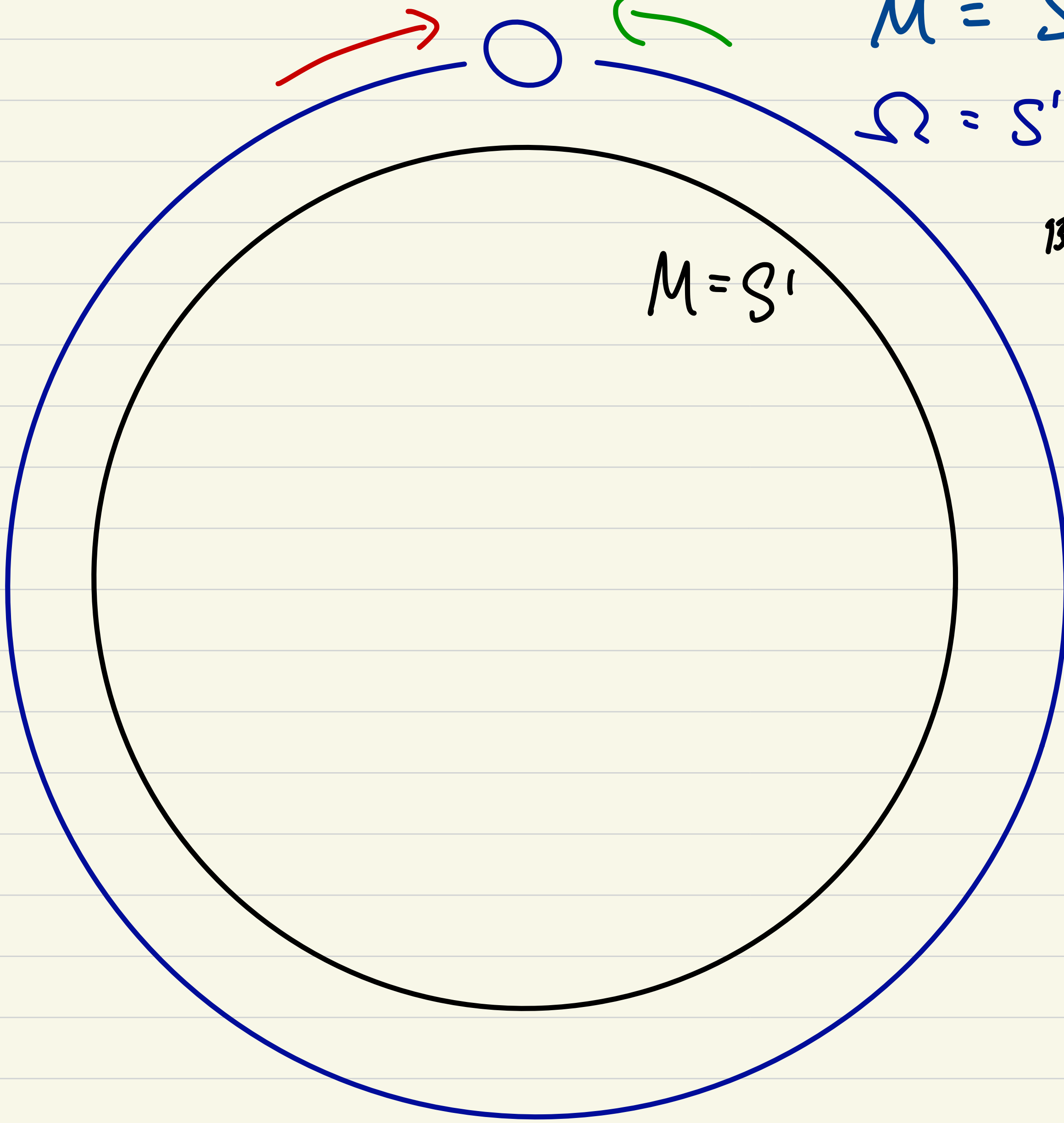
$$f \mapsto f|_\Omega$$

は全射？単射？

Answer : 全射とは限らない

単射とも限らない

Ex 13.2.1



$M = S^1$

$\Omega = S^1 \setminus \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}$

例えば

$h \in C^\infty(\Omega)$ を

$h : \Omega \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{1-x_2}$

とすると,

h は M 上の C^∞-級関数に

延張できない.

特に rest は全射でない.

Ex 13.2.2 (Prop 3.4.9 で述べたもの)

$M = \mathbb{R}$, $\Omega = (-\infty, 0)$ とする.

M 上のゼロ関数 M と Ex 3.2.5 の ρ を考える.

このとき $0_M \neq \rho$ on M だが

$$0_M|_\Omega = \rho|_\Omega = \text{ゼロ関数 on } \Omega$$

特に rest は単射でない

この節の主定理 ← M のハウスドルフ性が重要

Theorem 13.2.3 : $p \in \Omega$ を固定する.

$\forall h \in C^\infty(\Omega ; A_\Omega)$, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M ; A)$ s.t.

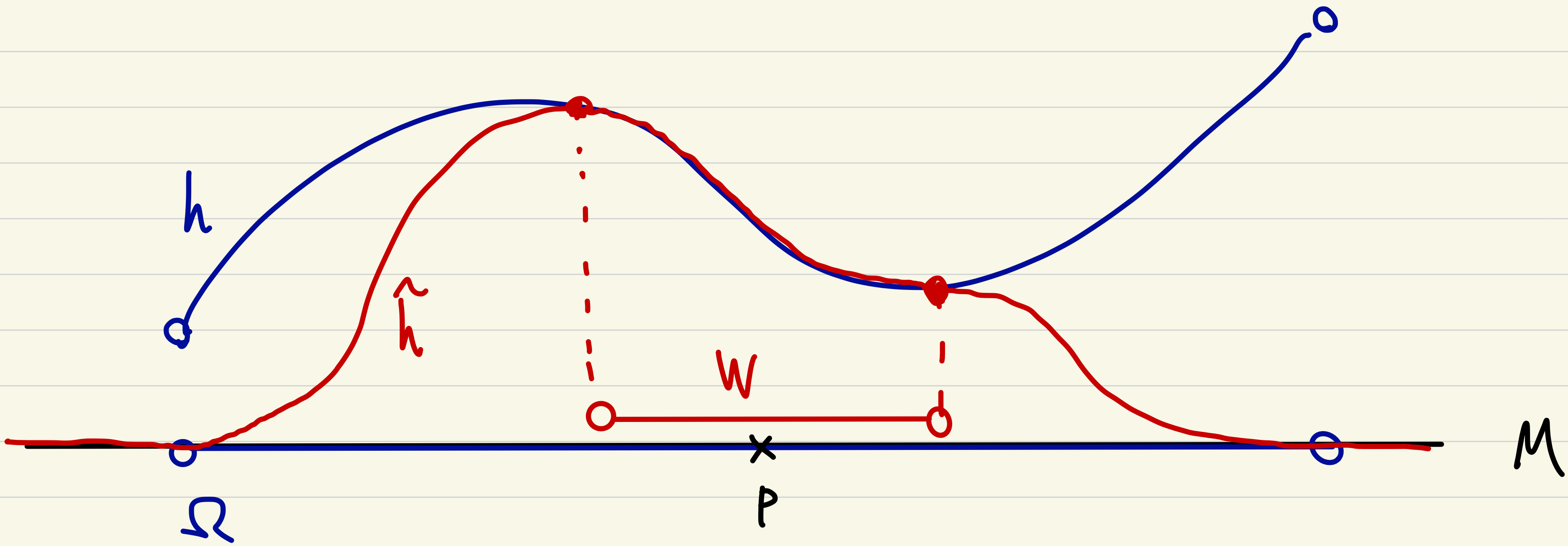
$\tilde{h}$ は p のまわりで h と一致

(i.e. $\exists W$: p の開近傍 in Ω s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$)

気持ち:

rest : $C^\infty(M;A) \to C^\infty(\Omega;A_\Omega)$ は局所的には全射!

イメージ



Section 3.4 を勉強した人向けの説明

$C_p^\infty(M;A)$, $C_p^\infty(\Omega;A_\Omega)$ を

$C^\infty(M;A)$, $C^\infty(\Omega;A_\Omega)$ の p における

stalk とする.

(各自定義せよ)

Theorem 13.2.4

$$C_p^\infty(M;A) \longrightarrow C_p^\infty(\Omega;A_\Omega),\ [f]_p \mapsto [f|_\Omega]_p$$

は well-defined かつ全単射

Thm 13.2.3 の証明のための準備

Prop 13.2.5 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の開被覆とする.
with $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ ($^\forall\lambda$)

$f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M ; \mathcal{A})$

(ii) $^\forall\lambda \in \Lambda$, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda : \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$

(Hint: Prop 10.1.2)

Prop 13.2.6 : 定数関数は $(M; \mathcal{A})$ 上 C^∞ 級

Prop 13.2.7

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ とし、

$r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ が

$\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \| u - u(p) \| \leq r_0 \} \subset U$ を満たすとする。

このとき $u^{-1}(\{ u \in \mathbb{R}^n \mid \| u - u(p) \| \leq r_0 \}) \subset O \subset M$

は コンパクト

特に M の閉集合

← "M はハウスドルフ" が重要

Prop 13.2.8

$(\mathcal{O}, \mathcal{U}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{A}$ とする.

このとき $\mathcal{A}_0 = [\{(\mathcal{O}, \mathcal{U}, \mathfrak{m})\}]$

(Hint: Thm 10.2.4)

Proof of Thm 13.2.3

$h \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$ を任意にとる.

示 $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$, $\exists W$: p の開近傍 in Ω

s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$

$(O, U, \varphi) \in A_\Omega$ with $p \in O$ をとる.

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ を $\{u \in U \mid \|u - \varphi(p)\| < r\} \subset U$

となるようにとる.

$$W := x^{-1}\left(\{ u \in U \mid \| u - x(p) \| < \tfrac{1}{3} r \} \right) \subset \Omega$$

とおくと W は p の開近傍 in Ω

示 $\exists\, \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$ s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$

C^∞級関数 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって

以下を満たすものをとる

(Thm 3.2.6 より そのような b は存在)

(i) $b(u) = 1$ if $\| u - x(p) \| \leq \frac{1}{3} r$

(ii) $b(u) = 0$ if $\| u - x(p) \| \geq \frac{2}{3} r$

$(u \in \mathbb{R}^n)$

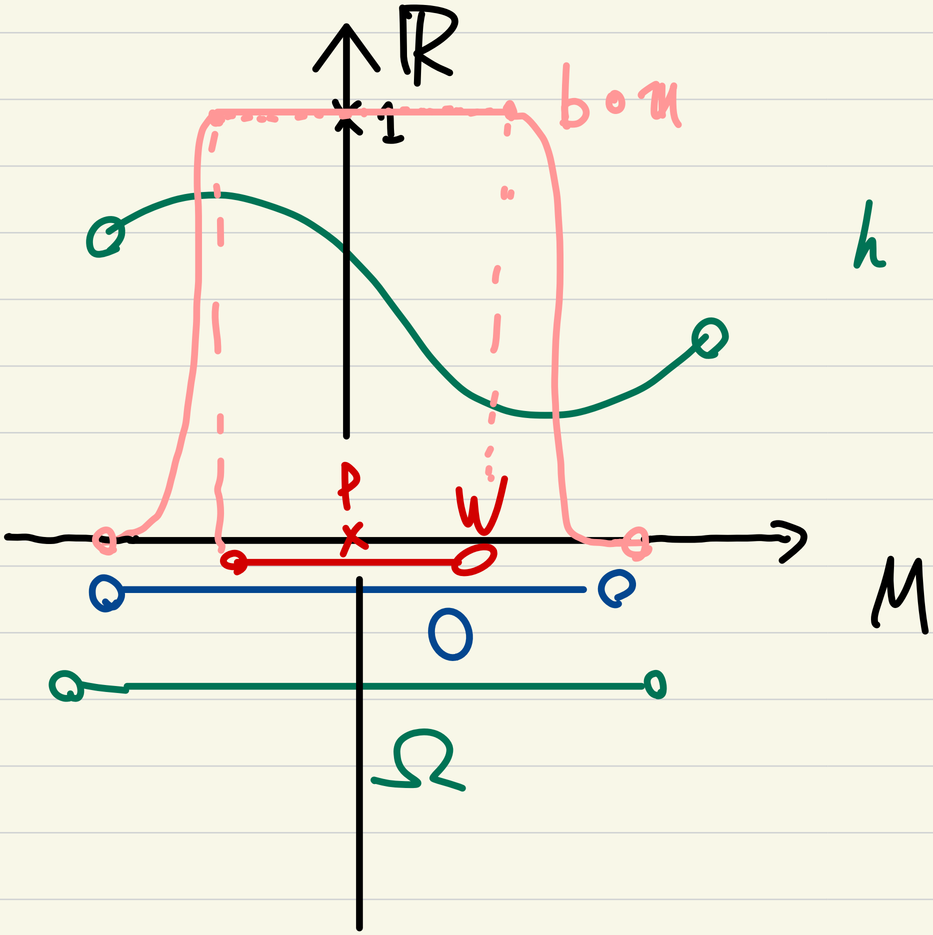
ここで $\tilde{h} : M \to \mathbb{R}$

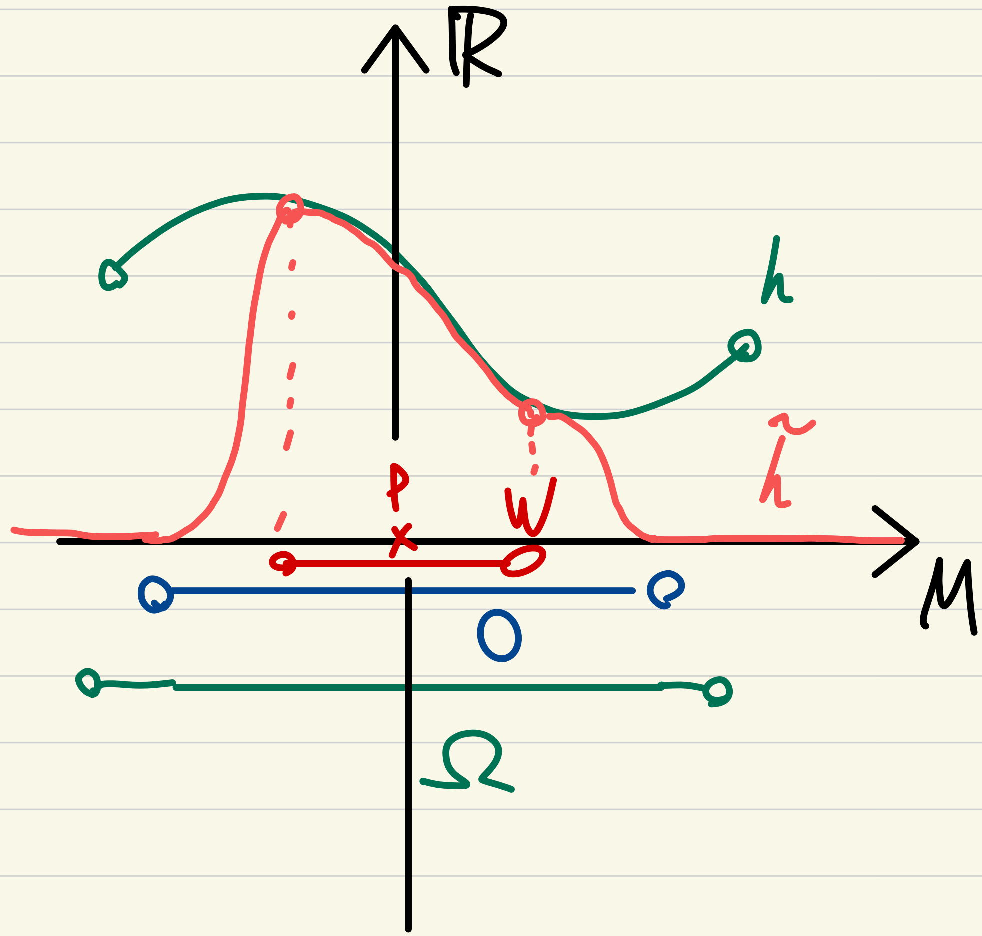
$$x \longmapsto \begin{cases} h(x) \cdot b(u(x)) & (\text{if } x \in O) \\ 0 & (\text{if } x \notin O) \end{cases}$$

とおく.

定義より明らかに $\tilde{h}|_W = h|_W$.

イメージ





示 $\tilde{h} \in C^\infty(M ; A)$

Prop 13.2.7 より

$O' := M \setminus u^{-1}(\{u \in U \mid \|u - u(p)\| \leq \frac{2}{3} r\})$

は M の open set

特に $\{O, O'\}$ は M の開被覆となる.

Prop 13.2.5 より 以下を示せばよい

示 $\tilde{h}|_O \in C^\infty(O ; A_O)$ かつ

$\tilde{h}|_{O'} \in C^\infty(O' ; A_{O'})$

定義より $\hat{h}|_{O'}$ はゼロ関数.

特に Prop 13.2.7 より $h|_{O'} \in C^\infty(O' ; A_{O'})$.

示 $\tilde{h}|_O \in C^\infty(O; A_O)$

いま $A_O = [\{(O, U, x)\}]$ ($\because$ Prop 13.2.8)

以下を示せば十分 ($\because$ Thm 10.3.1)

示 $\tilde{h} \circ x^{-1} \in C^\infty(U)$

$\tilde{h}$ の定義より $\tilde{h} \circ x^{-1} = \underbrace{(h \circ x^{-1})}_{\in\, C^\infty(U)} \cdot \underbrace{(\phi|_U)}_{\in\, C^\infty(U)} \in C^\infty(U)$

関数の積

$\in C^\infty(U)$

$\square$

Cor 13.2.9 : $n \geq 1$ とする．このとき

$$\dim C^\infty(M; \mathcal{A}) \geq \infty$$

Hint $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ をとる．

$$C^\infty(O; \mathcal{A}_O) \cong C^\infty(U)$$

$$\cup$$

{ U 上の多項式関数 }

無限次元

Section 13.2 終