Section 15 : 多様体上のベクトル場

意義 : C^∞ 級多様体上のベクトル場を定義する.

Part II : 多様体についてのあれこれ

内容：

- ベクトル場の定義
- ベクトル場の延長
- ベクトル場の貼り合わせ

Section 15.1 : ベクトル場の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M; \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

記号 : $C^\infty(M; \mathcal{A})$:

$(M, \mathcal{A})$ 上の C^∞ 級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

Def 15.1.1

$C^\infty(M;A)$ 上の線型作用素のなす空間

$X \in \mathrm{End}(C^\infty(M;A))$ が

$(M;A)$ 上の (C^∞ 級) ベクトル場

$$\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \quad X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$$

for any $f, g \in C^\infty(M;A)$

場のライプニッツ則

Prop 15.1.2:

A は省略

$$\mathcal{X}^{\infty}(M) := \{ X \in \mathrm{End}(C^{\infty}(M;A)) \mid X \text{ は } (M,A) \text{ 上のベクトル場} \}$$

は $\mathrm{End}(C^{\infty}(M;A))$ の線型部分空間

Prop 15.1.3: 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, 各 $p \in M$ について

$$X_p : C^\infty(M;A) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (Xf)(p)$$

とおくと $X_p \in T_pM$

Prop 15.1.4: $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ について

以下は同値

(i) $X = Y$ in $\mathfrak{X}^\infty(M)$

(ii) $X_p = Y_p$ in T_pM for any $p \in M$

Prop 15.1.5: 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $h \in C^\infty(M;A)$ について

$$hX : C^\infty(M;A) \to C^\infty(M;A),\ f \mapsto h \cdot (Xf)$$

$C^\infty(M;A)$ の積

は (M, A) 上のベクトル場

特に $\mathfrak{X}^\infty(M)$ は単位的 $C^\infty(M;A)$ 加群

(cf. Prop 5.1.10)

Prop 15.1.6 :

$^\forall X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$,

$$[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{X}^\infty(M)$$

特に $(\mathfrak{X}^\infty(M), [\ ,\ ])$ は Lie 代数

(cf. Def. 5.3.2)

Ex 15.1.7 :

$(M, \mathcal{A}) = (S^1, [\mathcal{A}_0])$ in Ex 10.4.3 とする.
(with $n=1$)

各 $\theta \in \mathbb{R}$ について ← θ・回転

$$g_\theta : S^1 \to S^1, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ とおく

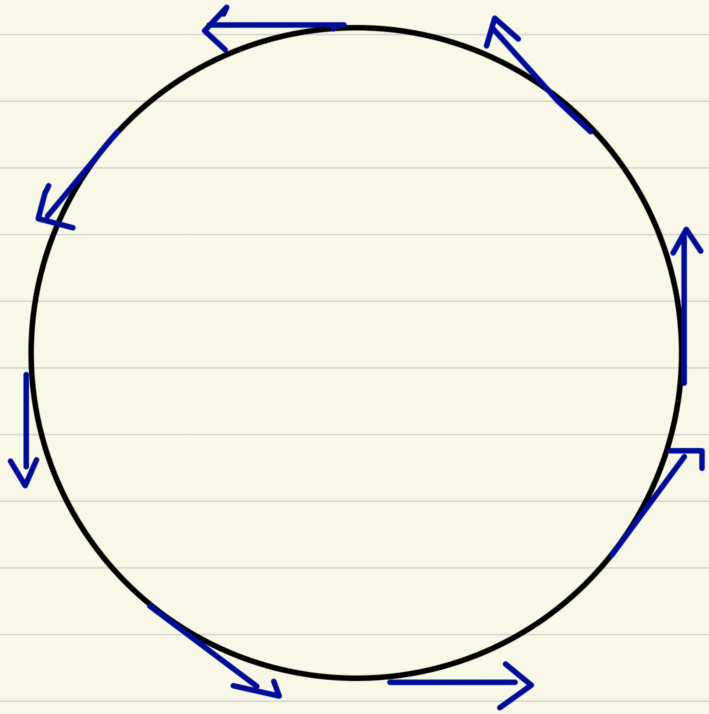
ここで

$$X : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1), \quad f \mapsto Xf : S^1 \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \lim_{\theta \to 0} \frac{f(g_\theta(p)) - f(p)}{\theta}$$

は S^1 上のベクトル場

X を表す図



初期値つき線型常微分方程式
$$\begin{cases} Xf = f \\ f(1,0) = 1 \end{cases}$$

は局所解を持つが，大域解は持たない

（S^1 のトポロジーが障害となる）

Ex 15.1.8 :

$(M, A) = (S^2, [A_0])$ in Ex 10.4.3 (with $n=2$) とする.

各 $\theta \in \mathbb{R}$ について

x_1軸回転

$$g_{1,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{2,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & & \sin\theta \\ & 1 & \\ -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ x_2軸回転

$$g_{3,\theta} : S^2 \to S^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ x_3軸回転

とおく.

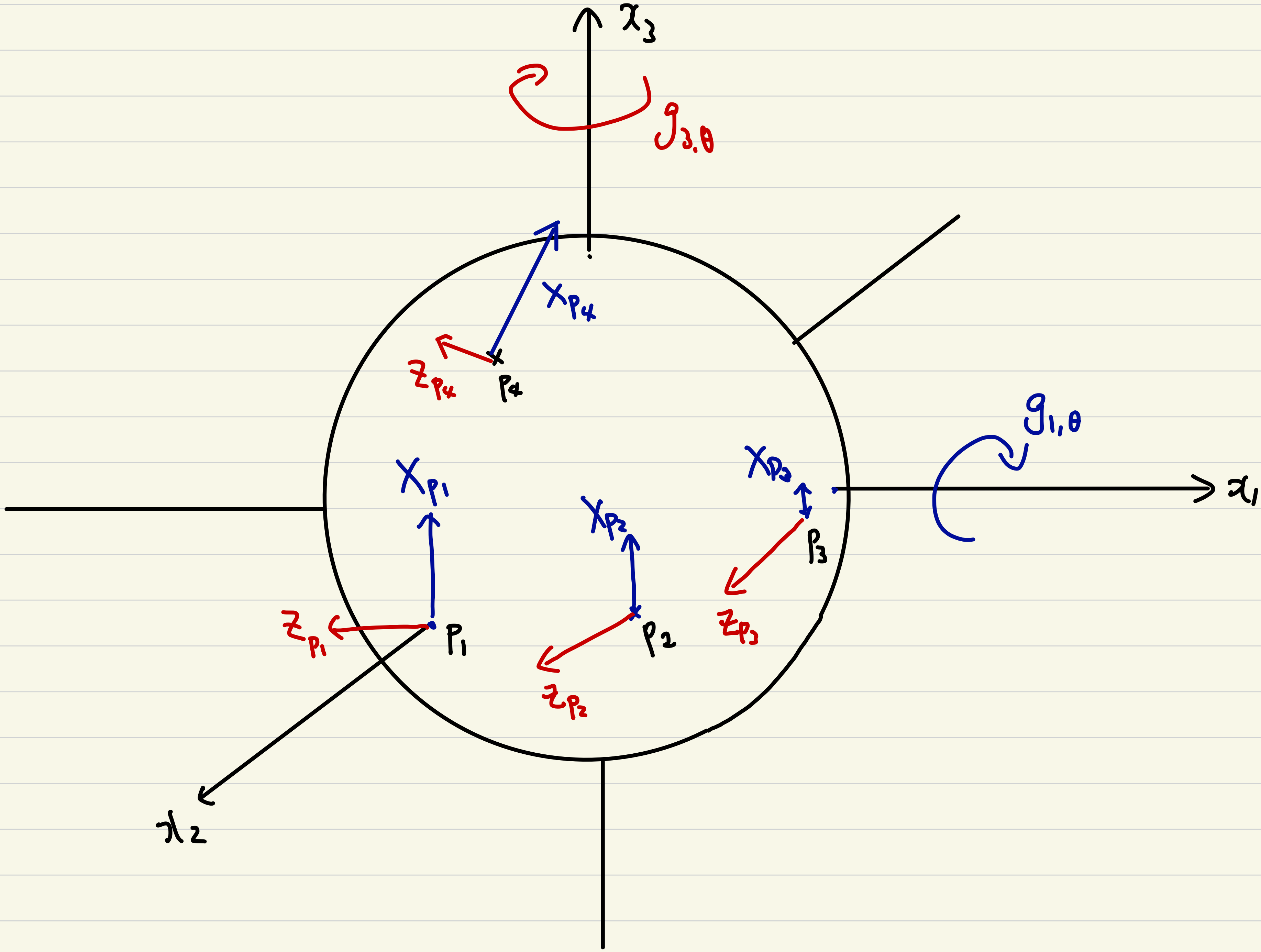
ここで

$$X : C^\infty(S^2) \to C^\infty(S^2)$$
$$f \mapsto Xf : S^2 \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \lim_{\theta\to 0} \frac{f(g_{1,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}$$

$$Y : C^\infty(S^2) \to C^\infty(S^2)$$
$$f \mapsto Yf : S^2 \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \lim_{\theta\to 0} \frac{f(g_{2,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}$$

$$Z : C^\infty(S^2) \to C^\infty(S^2)$$
$$f \mapsto Zf : S^2 \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \lim_{\theta\to 0} \frac{f(g_{3,\theta}(p)) - f(p)}{\theta}$$

は 実に ベクトル場



x3
g3,θ
Xp4
Zp4
p4
g1,θ
Xp1
Xp2
Xp3
x1
p3
Zp1
p1
p2
Zp3
Zp2
x2

このとき

$$[X, Y] = -Z$$

$$[Y, Z] = -X$$

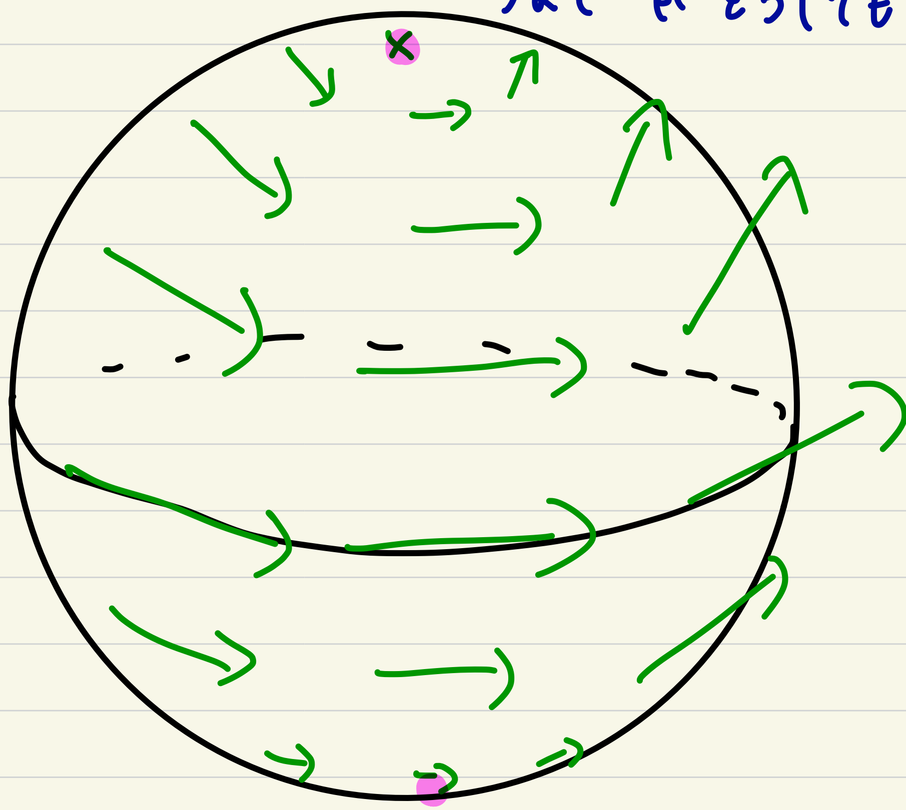
$$[Z, X] = -Y$$ が知られている.

Fact (Hairy ball theorem：不動点定理の一種)

$(S^2, [A_0])$ 上のベクトル場 X であって、

"$\forall p \in S^2,\ X_p \neq 0$" を満たすものは存在しない

"つむじ"がどうしても存在してしまう。



Section 15.2：ベクトル場の延長

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M;\mathcal{A})$：n 次元 C^∞ 級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subseteq} M$

記号：$\mathcal{A}_\Omega := \mathcal{A} \cap LC(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$\rightsquigarrow$ $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は $(M, \mathcal{A})$ の開部分多様体

Thm 14.4.1 より 各 $p \in \Omega \subset M$ について

T_pM と $T_p\Omega$ を同一視する.

Theorem 15.2.1

各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, 各 $g \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$ について

$$X_\Omega g : \Omega \to \mathbb{R},\quad p \mapsto X_p g$$

とおく.　　　　$T_p\Omega$ の元とみなしている

このとき $X_\Omega : C^\infty(\Omega; A_\Omega) \to C^\infty(\Omega; A_\Omega)$

は well-defined で $X_\Omega \in \mathfrak{X}^\infty(\Omega)$

証明は Section 15.4 で行う（後日掲載）

Prop 15.2.2

$$(\mathfrak{X}^\infty(M), [\,,\,]) \to (\mathfrak{X}^\infty(\Omega), [\,,\,])$$
$$X \mapsto X_\Omega$$

は $\mathbb{R}$代数準同型（Lie代数準同型）

Remark　上の準同型は一般には

全射とも単射とも限らない

ベクトル場の延長定理

Theorem 15.2.3　$p \in \Omega$ とする.

このとき

$^\exists \Omega_p$: Ω における p の開近傍 s.t.

$$^\forall Y \in \mathfrak{X}^\infty(\Omega),\ ^\exists \tilde{Y} \in \mathfrak{X}^\infty(M)$$

$$\text{s.t. } \tilde{Y}_{\Omega_p} = Y_{\Omega_p} \text{ in } \mathfrak{X}^\infty(\Omega_p)$$

証明は Section 15.4 で行う（後日掲載）

Cor 15.2.4 $p \in M$, $y \in T_pM$ とする.

このとき $^\exists X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ s.t. $X_p = y$

Hint Thm 15.2.3 において

$(O, U, u) \in A_\Omega$ with $p \in O$ をとり,

$\Omega = O$

$Y \in \mathfrak{X}^\infty(O) \simeq \mathfrak{X}^\infty(U)$ を

$Y_p = y$ となるようにとればよい

(Cor 5.1.7 を使う)

Section 15.3 : ベクトル場の貼り合わせ

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M ; \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

$\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: M の開被覆 with

$\Omega_\lambda \neq \emptyset$ for any $\lambda \in \Lambda$.

$\{X_p\ (\in T_pM)\}_{p\in M}$ を固定

Def 15.3.1

(1) 各 $f\in C^\infty(M;A)$ について

$$Xf : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_pf$$ とおく.

更に

$$X : C^\infty(M;A) \to \mathbb{R}^M,\ f \mapsto Xf$$ とおく.

(2) 各 $\lambda\in\Lambda$, 各 $g\in C^\infty(\Omega_\lambda, A_{\Omega_\lambda})$ について

$$X^\lambda g : \Omega_\lambda \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_pg$$ とおく.

$T_p\Omega_\lambda$ の元とみなす

更に

$$X^\lambda : C^\infty(\Omega_\lambda; A_{\Omega_\lambda}) \to \mathbb{R}^{\Omega_\lambda},\ g \mapsto X^\lambda g$$

とおく.

Prop 15.3.2

(1) $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

$\iff {}^\forall f \in C^\infty(M;\mathcal{A}),\ Xf \in C^\infty(M;\mathcal{A})$

(2) 各 $\lambda \in \Lambda$ について

$X^\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

$\iff {}^\forall g \in C^\infty(\Omega_\lambda;\mathcal{A}_{\Omega_\lambda}),\ X^\lambda g \in C^\infty(\Omega_\lambda;\mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$

Hint: X, X_λ の線型性と場のライプニッツ則をcheck.

ベクトル場の貼り合わせ定理

Theorem 15.3.3

以下は同値

(i) $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$.

(ii) $X^\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(\Omega_\lambda)$ for any $\lambda \in \Lambda$.

証明は Section 15.4 で行う（後日掲載）

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ を M の C^∞-atlas とする.

各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $i = 1, \cdots, n$ について

$f_i^{X,u} : O \to \mathbb{R}$ を

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i^{X,u}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \quad (p \in O)$$

となるように定める.

(Thm 14.2.4 より一意に定まる)

Cor 15.3.4 以下は同値

(i) : $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$

(ii)$'$: $f_i^{X,u} \in C^\infty(O; \mathcal{A}_0)$

for any $(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$

and $i = 1, \cdots, n$

Section 15.4 各種定理の証明

試験範囲外

後日掲載