Section 16 : 多様体の間の写像とその微分

目標 : C^∞級多様体の間のC^∞級写像とその微分を定義する.

Part II : 多様体についてのあれこれ

Section 14 多様体の接空間
15 多様体上のベクトル場
16 多様体の間の写像とその微分 ☆
17 多様体の正則部分多様体

内容

- C^∞級写像
- C^∞級写像の微分
- C^∞級写像の合成とその微分
- 速度ベクトル

Section 16.1 : C^∞級写像

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i次元 C^∞級多様体

$(i = 1, 2)$

記号 : $C^\infty(M_i, \mathcal{A}_i)$:

$(M_i, \mathcal{A}_i)$上の C^∞級関数全体のなす $\mathbb{R}$代数

$(i = 1, 2)$

Def 16.1.1:

連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が

$(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞ 級写像

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi^*(C^\infty(M_2; \mathcal{A}_2)) \subset C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1)$

Prop 16.1.2: $\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M_1$ とし、

$(\Omega, \mathcal{A}_{1,\Omega})$ を M_1 の開部分多様体とする.

(see Section 13)

$\varphi : M_1 \to M_2$ を $(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への

C^∞ 級写像とする.

このとき $\varphi|_\Omega : \Omega \to M_2$ も

$(\Omega, \mathcal{A}_{1,\Omega})$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$

への C^∞ 級写像

Theorem 16.1.3 (C^∞級写像の局所性)

$\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M_1 の開被覆 with $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ for any $\lambda\in\Lambda$ とする.

$\varphi : M_1 \to M_2$ を写像とする.

以下の2条件は同値

(i) φ は $(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞級写像

$\Updownarrow$

(ii) 各 $\lambda\in\Lambda$ について

$\varphi|_{\Omega_\lambda}$ は $(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_{1,\Omega_\lambda})$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞級写像

Theorem 16.1.4 : $\emptyset \neq \Upsilon \underset{\text{open}}{\subset} M_2$ とし,

$(\Upsilon, \mathcal{A}_{2,\Upsilon})$ を M_2 の開部分多様体とする.

写像 $\varphi : M_1 \to \Upsilon$ について以下の2条件は同値

(1) φ は M_2 への写像として

$(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞ 級写像

(2) φ は $(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(\Upsilon, \mathcal{A}_{2,\Upsilon})$ への C^∞ 級写像

Hint : Thm 13.2.3 を用いる.

Cor 16.1.5 : 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ について

以下の3条件は同値

(i) φ は $(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞ 級写像

(ii) ${}^\forall p \in M_1$, ${}^\forall (\mathcal{O}, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}_1$ with $p \in \mathcal{O}$,

${}^\forall (\mathcal{O}', V, \mathfrak{v}) \in \mathcal{A}_2$ with $\varphi(p) \in \mathcal{O}'$,

$$\varphi_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} : \underset{\text{open}}{\mathfrak{u}(\mathcal{O} \cap \varphi^{-1}(\mathcal{O}'))} \subset \mathbb{R}^{n_1} \to V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$$

$$u \longmapsto \mathfrak{v}(\varphi(\mathfrak{u}^{-1}(u)))$$

は C^∞ 級写像

(iii) $\forall p \in M_1$, $\exists\, (O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}_1$ with $p \in O$,

$\exists\, (O', V, \mathfrak{v}) \in \mathcal{A}_2$ with $\varphi(p) \in O'$

s.t.

$$\varphi_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} : \mathfrak{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1} \to V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$$

$$u \mapsto \mathfrak{v}(\varphi(\mathfrak{u}^{-1}(u)))$$

は C^∞ 級写像

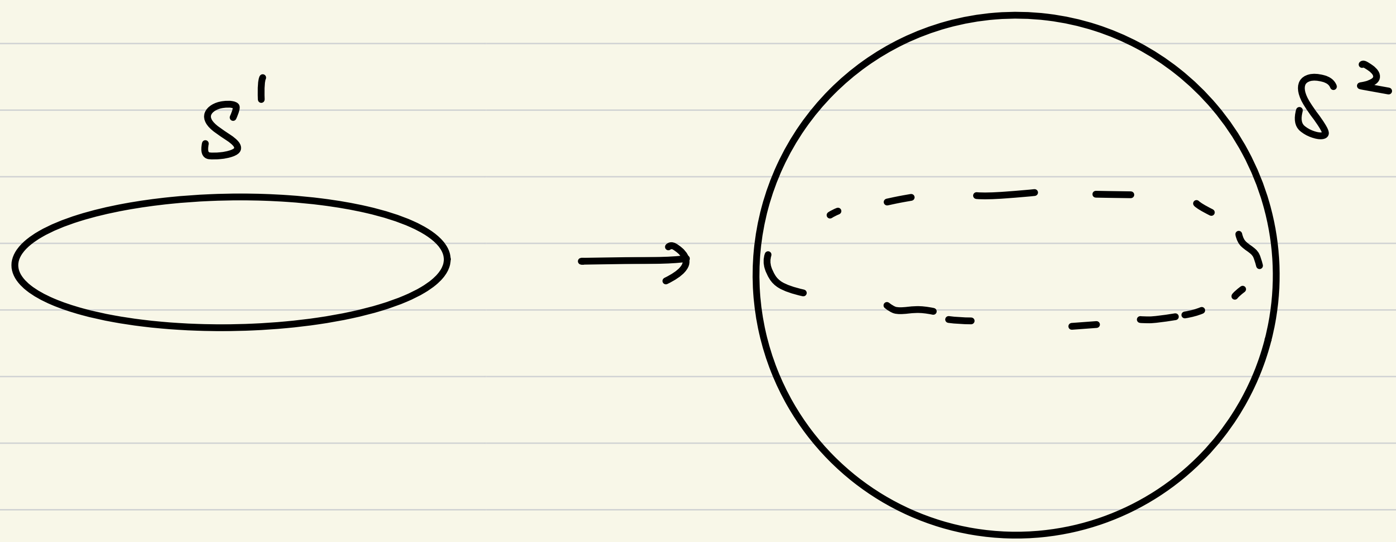
Ex 16.1.6

$\varphi : S^1 \to S^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$

は $(S^1, [A_0^{S^1}])$ から $(S^2, [A_0^{S^2}])$ への C^∞ 級写像

Ex 9.3.6 のもの

Cor 16.1.5 を用いると check できる.



Section 16.2 : C^∞級写像の微分

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i次元 C^∞級多様体 $(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級写像

$p \in M_1$.

記号：

$T_p M_1$: $(M_1, \mathcal{A}_1)$ の p における接空間

$T_{\varphi(p)} M_2$: $(M_2, \mathcal{A}_2)$ の $\varphi(p)$ における接空間

Prop 16.2.1 :

各 $g \in T_pM_1$ について $g \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}M_2$

Def 16.2.2 :

$(d\varphi)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}M_2,\ g \mapsto g \circ \varphi^*$

を φ の p における全微分とよぶ

Prop 16.2.3: $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ は線型写像

$(O, U, u) \in A_1$ with $p \in O$,

$(O', V, v) \in A_2$ with $\varphi(p) \in O'$ を固定する.

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V, \quad u \mapsto v(\varphi(u(u)))$$

$\overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $\overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$

とおく

(C^∞級写像)

Theorem 16.2.4 $j = 1, \cdots, n_1$ について,

$$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(J\varphi_{uv}\right)_{u(p)}\right)_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_{\varphi(p)}$$

Section 16.3 : C^∞級写像の合成とその微分

設定 : $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i次元 C^∞級多様体 $(i = 1, 2, 3)$

$\varphi : M_1 \to M_2$

$\psi : M_2 \to M_3$

: C^∞級写像

Theorem 16.3.1 :

$\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は

(M_1, A_1) から (M_3, A_3) への C^∞ 級写像

Theorem 16.3.2 : $p \in M_1$ とする. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

as $T_p M_1 \to T_{(\psi \circ \varphi)(p)} M_3$

Section 16.4 : 速度ベクトル

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

$(a, b) \subset \mathbb{R}$: 空でない開区間

$(-\infty \leq a < b \leq \infty)$

(a, b) を自然な意味で 1 次元 C^∞ 級多様体とみなす.

Def 16.4.1 $c : (a,b) \to M$ を C^∞級曲線

$$\overset{\longleftrightarrow}{\text{def}} \quad (a,b) \text{ から } M \text{ への } C^\infty \text{級写像}$$

Def 16.4.2 : 各 $t_0 \in (a,b)$ について

$\dot{c}(t_0) \in T_{c(t_0)} M$ を

速度ベクトル

「各 $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ に対して

$$\dot{c}(t_0)(f) := \lim_{h \to 0} \frac{f(c(t_0+h)) - f(c(t_0))}{h} 」$$

として定める.

Prop 16.4.3 : $a < 0 < b$ とする.

$p \in M$, $y \in T_pM$ を fix.

このとき $^\exists c : (a, b) \to M$: C^∞級曲線

s.t. $\dot{c}(0) = y$

Theorem 16.4.4

$a < 0 < b$ とする．

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし

(M_i, A_i) を n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．

$(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像，

$c : (a, b) \to M_1$ を C^∞ 級曲線とする．

このとき　$\varphi \circ c : (a, b) \to M_2$ は C^∞ 級曲線で，

$$(d\varphi)_p (\dot{c}(0)) = (\dot{\overbrace{\varphi \circ c}})(0)$$