Section 17：多様体の正則部分多様体

意義：C^∞級多様体の正則部分多様体を定義する。

Part II：多様体についてのあれこれ

Section 14 多様体の接空間
15 多様体上のベクトル場
16 多様体の間の写像とその微分
17 多様体の正則部分多様体

内容

- 多様体の正則部分多様体の定義
- 正則値の逆像として得られる正則部分多様体

Section 17.1 : 多様体の正則部分多様体の定義

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M, \mathcal{A})$: $n+k$ 次元 C^∞ 級多様体

$S \subset M$: 部分集合

(開集合とは限らない)

記号 $\mathbb{R}^n := \{ (u_1, \cdots, u_n, 0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid u_i \in \mathbb{R} \}$

とみなす.

Def 17.1.1 $(O, U, u) \in LC(S : \mathbb{R}^n)$ が

$(M, \mathcal{A})$ 内で正則

$\overset{\mathrm{def}}{\iff} \exists (\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A}$ s.t.

$$\begin{cases} \tilde{O} \cap S = O \\ \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U \\ \tilde{u}|_O = u \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{n+k}$ の部分空間とみなしている

Prop 17.1.2

$(O, U, u), (O', V, v) \in LC(S:\mathbb{R}^n)$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

を $(M, \mathcal{A})$ 内で正則とする.

このとき

座標変換 $T_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$ は C^ω 級写像.

Lemma 17.1.3

$\emptyset \neq \tilde{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$ with $\tilde{U} \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ を fix

$$U := \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \quad \text{とおく}$$

このとき任意の

$\tau : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n+k}$: C^∞級写像 について

$$\tau|_U : \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap \text{open}}}{U} \to \mathbb{R}^{n+k} \text{ も } C^\infty \text{級写像}$$

以下，S が 以下の条件 A_n を満たすとする。

条件 A_n : $\forall p \in S$, $\exists (O, U, u) \in LC(S : \mathbb{R}^n)$

s.t. (O, U, u) は (M, A) 内で正則

and $p \in O$.

このとき

$$A^n_{reg} := \{ (O, U, u) \in LC(S : \mathbb{R}^n) \mid (O, U, u) \text{ は } (M, A) \text{ 内で正則} \}$$

とおく.

Prop 17.1.4 : このとき $\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}$ は S 上の C^∞-atlas

特に $(S, [\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}])$ は n 次元 C^∞ 級多様体

Def 17.1.5 : $(S, [\mathcal{A}^n_{\mathrm{reg}}])$ を $(M, \mathcal{A})$ の

n 次元正則部分多様体とよぶ.

Remark: $\mathbb{R}^{n+k}$ を自然な意味で

$n+k$ 次元 C^∞ 級多様体とみなす.

このとき

Def 17.1.1 は Def 11.2.2 と同じで,

Def 17.1.5 は Def 11.3.2 と同じもの

(以下の Lemma から従う)

Lemma 17.1.6

$\mathcal{A} = [(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k}, id_{\mathbb{R}^{n+k}})]$ とおく.

$(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in LC(\mathbb{R}^{n+k}; \mathbb{R}^{n+k})$ について

$(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \tilde{u} : \tilde{O} \to \tilde{U}$ が微分同相

Prop 17.1.7 :

包含写像 $\iota : S \to M$ は

$(S, [\mathcal{A}^n_{\mathrm{ray}}])$ から $(M, \mathcal{A})$ への

C^∞級写像

Hint : Cor 16.1.5

Prop 17.1.8 : $p \in S$ を fix.

$(O, U, x) \in \mathcal{A}^n_{reg}$ と

$(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{x}) \in \mathcal{A}$ with $\begin{cases} \tilde{O} \cap S = O \\ \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U \\ \tilde{x}|_O = x \end{cases}$ を fix.

このとき $i = 1, \cdots, n$ について

$$(d\iota)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right)_p$$

特に $(d\iota)_p : T_pS \to T_pM$ は単射.

Section 17.2 : 正則値の逆像として得られる正則部分多様体

<u>設定</u> $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$(M, \mathcal{A})$: $n+k$ 次元 C^∞ 級多様体

$(N, \mathcal{B})$: k 次元 C^∞ 級多様体

$\varphi : M \to N$: C^∞ 級写像

Def 17.2.1 : $q \in N$ が φ の臨界値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists} p \in \varphi^{-1}(\{q\})$ s.t.

$(d\varphi)_p : T_pM \to T_qN$ が全射でない

Def 17.2.2 : $q \in N$ が φ の正則値

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $q \in \varphi(M)$ かつ q は φ の臨界値でない

以下，$q \in N$ を φ の正則値とする。

$\phi \neq S_q := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset M$ とおく。

Theorem 17.2.3：

このとき S_q は条件 $Ⓐ_n$ を満たす。

特に $(S_q, [A^n_{reg}])$ は

n 次元 C^∞ 級多様体

Ex 17.2.4

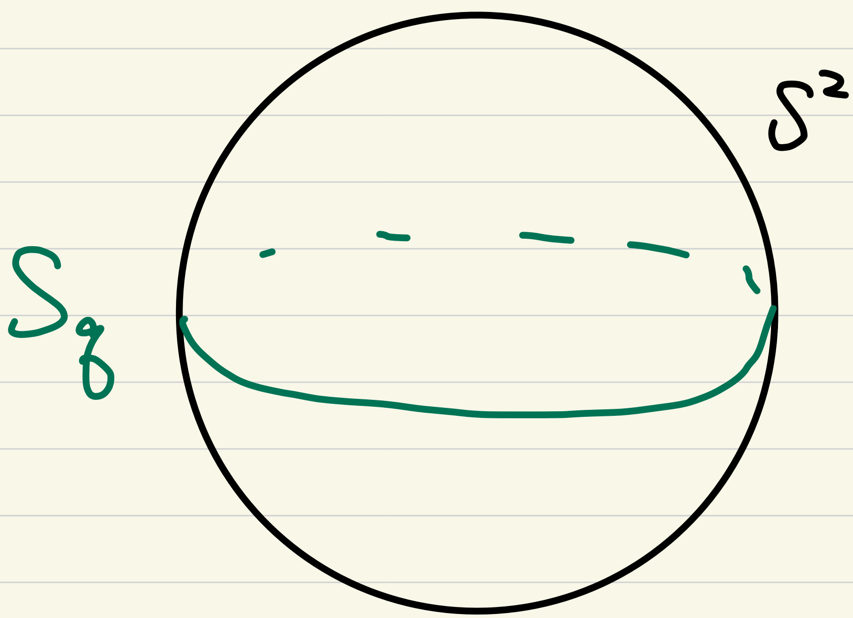
$\varphi : S^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_3$ は C^∞級

$q := 0 \in \mathbb{R}$ は 正則値

(証明必要 : Thm 16.2.4 を用いる)

これより $S_q = \{ x \in S^2 \mid x_3 = 0 \}$ は

S^2 の 1次元正則部分多様体



Theorem 17.2.5

$p \in S_q$ とする. このとき

$$(d\iota)_p(T_pS_q) = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p$$

in T_pM

証明は Section 17.3 (後日公開)

Ex 17.2.5

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

は C^∞ 級

$g = 1$ は φ の正則値 (Ex 11.4.4)

$S_g = S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_i x_i^2 = 1 \}$

は $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体

包含写像 $\iota : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を考える.

各 $p \in S^2$ について

$$(d\iota)_p(T_pS^2) = \mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p$$

ここで

$$(J\varphi)_p = (2p_1 \quad 2p_2 \quad 2p_3) \text{ より}$$

$$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_q\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto 2\sum_i p_i a_i$$

従って

$$(d\iota)_p(T_pS^2) = \mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = \left\{ \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; \underbrace{\sum_i a_i p_i = 0}_{} \right\}$$

p と (a_1, a_2, a_3) が直交