

# Section 2: $\mathbb{R}$ 代数

意義: “微分論”を代数的に捉えよ  
1: 女の言葉の準備

Part I: 多変数の微分論の代数化

Section 2  $\mathbb{R}$  代数 ✖

3  $\mathbb{C}^\infty$  級関数

4 方向微分

5 ベクトル場

6 ✖ 写像の微分

内容

- ◎  $\mathbb{R}$  代数の定義
- ◎ 関数の可 $\mathbb{R}$ 代数
- ◎ 線型作用素の可 $\mathbb{R}$ 代数
- ◎  $\mathbb{R}$  代数の各種性質

## Section 2.1 : $\mathbb{R}$ 代数の定義と例

### Def 2.1.1 (双線型写像)

$V_1, V_2, W$  は実ベクトル空間と可也.

写像  $F : V_1 \times V_2 \rightarrow W$  が双線型

$\iff$   $F$  は第一、第二変数それぞれに於いて線型

i.e. ①  $\forall b \in V_2, V_1 \rightarrow W, a \mapsto F(a, b)$  が線型

②  $\forall a \in V_1, V_2 \rightarrow W, b \mapsto F(a, b)$  が線型

## Def 2.1.2 (R 代数)

$V$  は実ベクトル空間とする。

$V$  上の二項演算 (積と呼ぶ)

$$V \times V \rightarrow V, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

$\varepsilon$  fix.

$(V, \cdot)$  は  $\mathbb{R}$  代数

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \cdot$  は  $\mathbb{R}$  双線型

Ex 2.1.3  $\mathbb{R}$  は通常の積によって  $\mathbb{R}$  代数

この講義では以下の形のベクトル空間が主に現れる。

$S$  は集合,  $W$  は実ベクトル空間とする。

$S$  から  $W$  への写像 ( $W$  値関数) 全体の集合を

$$W^S := \{ f : S \rightarrow W \} \quad \text{と書く.}$$

Prop 2.1.4 :  $W^S$  は以下の 関数の和, 関数のスカラー倍 により  
実ベクトル空間となる:

和 : 各  $f, g \in W^S$  について  $f+g : S \rightarrow W, x \mapsto f(x) + g(x)$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 $W^S$  の和  $W$  の和

スカラー倍 : 各  $f \in W^S, \lambda \in \mathbb{R}$  について  $\lambda \cdot f : S \rightarrow W, x \mapsto \lambda \cdot f(x)$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 $W^S$  のスカラー倍  $W$  のスカラー倍

# 関数の和, 関数のスカラー倍の定義についての注意

「何が入力 “入力” で何が入力 “出力” ？」を意識する。

	入力	出力
$S$ 上の $W$ 値関数	$S$ の元	$W$ の元
関数の和	2つの $S$ 上の $W$ 値関数	<u><math>S</math> 上の <math>W</math> 値関数</u>
関数のスカラー倍	$S$ 上の $W$ 値関数と $\mathbb{R}$ の元	<u><math>S</math> 上の <math>W</math> 値関数</u>

この自体が 入力 と 出力 を  
持っている

## Remark

@  $W^S$  は "W の S 回直積" と呼ぶことができる  
 $\varphi^S$  については詳しく (TJ)

@  $W$   $\varphi^S$  有限次元,  $S$   $\varphi^S$  有限集合 のとき

$$\dim W^S = \dim W \times \#S$$

(  $\varphi^S$  ) この講義 では

$\dim W, S$  の有限性は仮定 (TJ) .

$\mathbb{R}$  代数の重要例  $\mathbb{R}^1$ :

Ex 2.1.5 (関数の可代数)

$S$  は集合と可し.  $S$  上の実数値関数の可代数空間

$$\mathbb{R}^S := \{ f: S \rightarrow \mathbb{R} \}$$

は以下の“各点ごとの積”について  $\mathbb{R}$  代数と可し.

積: 各  $f, g \in \mathbb{R}^S$  について

$$f \cdot g: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

$\leftarrow \mathbb{R}^S$  の積  $\leftarrow \mathbb{R}$  の積



もう一つの重要な例を紹介する。

以下はその準備:

Prop 2.1.6:  $V, W \in$  実ベクトル空間 とする。

このとき 線型写像の集合

$$\mathcal{L}(V, W) := \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ は線型} \}$$

は  ~~$V^W$~~  (Prop 2.4 の意味で 実ベクトル空間 とみても可)

$W^V$

の 線型部分空間

$\mathbb{R}$  代数の重要例 2.1.7:

Ex 2.1.7 (線型作用素の可換  $\mathbb{R}$  代数)

$V$  は実ベクトル空間とする。

$\text{End}(V) := \mathcal{L}(V, V)$  とおく。

$\text{End}(V)$  の元  $T \in V$  上の線型作用素と呼ぶ。

$\text{End}(V)$  は加法の合成に

ついて  $\mathbb{R}$  代数となる。

Section 2.1 終

## Section 2.2: 部分 R 代数, R 代数準同型

### Def 2.2.1 (部分 R 代数)

$(V, \cdot) \in R$  代数,  $W \subseteq V$  の線型部分空間  
とす。

$W \subseteq V$  (部分 R 代数)

$\xleftrightarrow{\text{def}}$   $W$  は " $\cdot$ " について閉じた。

(i.e.  $\forall a, b \in W, a \cdot b \in W$ )

Prop 2.2.2: 部分 R 代数は R 代数

Ex 2.2.3:  $S \in$  位相空間  $\varepsilon \neq \emptyset$ .

$$C(S) := \{ f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続} \} \\ \subset \mathbb{R}^S$$

は  $\mathbb{R}^S$  ( Ex 2.5 の意味での  $\mathbb{R}$  代数 ) の  
部分  $\mathbb{R}$  代数.

特に  $C(S)$  は  $\mathbb{R}$  代数.

Prop 2.2.4:

$(V, \cdot) \in \mathbb{R}$  代数  $\mathfrak{L}$ ,

$\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in V$  の部分  $\mathbb{R}$  代数の族  $\mathfrak{L}$  と可し.

このとき  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$  は  $V$  の部分  $\mathbb{R}$  代数

Ex 2.2.5  $S$  は位相空間と可也.

各  $f \in \mathbb{R}^S$  について

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}}$$

←  $S$  における  
閉包

$\subset S$  と可也.

このとき  $\{f \in \mathbb{R}^S \mid \text{supp } f \text{ は compact}\}$  は

$\mathbb{R}^S$  の部分  $\mathbb{R}$  代数

特に  $C_c(S) := C(S) \cap \{f \in \mathbb{R}^S \mid \text{supp } f \text{ は compact}\}$

は  $\mathbb{R}^S$  の (特に  $C(S)$  の) 部分  $\mathbb{R}$  代数

## Def 2.2.6 (R代數準同型)

$(V, \cdot_V), (W, \cdot_W) \in \mathcal{A}$  的  $R$  代數  $\Rightarrow$  可。

線型寫像  $\varphi: V \rightarrow W$  的  $R$  代數準同型

$$\begin{array}{ccc} \Leftrightarrow & \forall a, b \in V, & \varphi(a \cdot_V b) = \varphi(a) \cdot_W \varphi(b) \\ \text{def} & & \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ V \text{ 的 } a & W \text{ 的 } a \end{array} \end{array}$$

Ex. 2.2.7:  $S$ , 集合,  $p \in S$  と可.

$$\text{ev}_p : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$$

$\mathbb{P}$                        $\mathbb{P}$

Ex 2.1.5                      Ex 2.1.3

は  $\mathbb{R}$  代数準同型



Ex 2.2.8  $S_1, S_2$  は位相空間

$\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  は連続写像とす。

このとき  $\varphi$  に対応して

$$\varphi^* : C(S_2) \rightarrow C(S_1), f \mapsto f \circ \varphi$$

は  $\mathbb{R}$  代数準同型。

Section 2.2 終

## Section 2.3: $\mathbb{R}$ 代數の各種性質

$(V, \cdot)$  :  $\mathbb{R}$ 代數  $\Leftrightarrow$  可也.

### Def 2.3.1

①  $(V, \cdot)$  可结合的  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$   
( $\forall a, b, c \in V$ )

②  $(V, \cdot)$  可单位的  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$  单位元  $e$  存在

( "  $a \cdot 1_V = 1_V \cdot a = a$  ( $\forall a \in V$ ) " )  
 $\Leftrightarrow \exists 1_V \in V$  可也

③  $(V, \cdot)$  可交换  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \cdot b = b \cdot a$  ( $\forall a, b \in V$ )

Prop 2.3.2: 結合性, 可換性 は 部分  $\mathbb{R}$  代数 に 遺伝 可也.

“単位的である” という性質 は 遺伝 可也 とは 限ら ない.

Ex 2.3.3:  $S \ni$  位相空間 と 可也.

$\mathbb{R}^S$  は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$   
 $C(S)$  は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$   
 $C_c(S)$  は 結合的, 可換,

$C_c(S)$  が 単位的  $\Leftrightarrow S$  が compact

## Ex 2.3.4

$\text{End}(V)$  (Ex 2.1.7 の意味で  $\mathbb{R}$  代数) は  
結合的 かつ 単位的.

可換  $\Leftrightarrow \dim V \leq 1$ .

Ex 2.3.5:  $(V, \cdot)$  は結合的  $\mathbb{R}$  代数 と可也.

$V$  上  $n =$  項演算  $[\cdot, \cdot]$  (bracket 積) を

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a \quad (a, b \in V)$$

と定める.

このとき  $(V, [\cdot, \cdot])$  は  $\mathbb{R}$  代数.

この  $(V, [\cdot, \cdot])$  は 一般には

結合的 でも 単位的 でも 可換 でも ない.

(Lie 代数 と呼ばれるもの に 対応)

Section 2.3 終