Section 3 : 多変数 C^∞ 級関数

意義 : "C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数" を定義する.
この代数の言葉で多変数の微分論を書き直すのが当面の目標.

Part I : 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$ 代数
3 C^∞ 級関数
4 方向微分
5 ベクトル場
6 ~~5~~ 写像の微分

内容

- ユークリッド空間の開集合上の C^∞ 級関数の定義
- C^∞ 級関数の各種構成
- C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数
- 芽と茎　試験範囲外

Section 3.1 : C^∞ 級関数の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空ではない開集合

($n=0$ のとき $\mathbb{R}^0$ は一点集合なのであまり面白くない
以下 $n \geq 1$ を想定して構わない)

記号 :

$e_1, \cdots, e_n$: $\mathbb{R}^n$ の標準基底

U 上の C^∞ 級関数の定義を復習する.

Def 3.1.1: $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^0 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は U 上連続

Def 3.1.2: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^k 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $i = 1, \cdots, n$ について

偏導関数

$\mathbb{R}^n$ の和

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R},\ p \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(p+he_i) - f(p)}{h}$$

が well-defined であり, 更に U 上 C^{k-1} 級

(帰納的定義)

Prop 3.1.3: C^k 級 $\Rightarrow$ C^{k-1} 級 $({}^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

Remark これは $k=1$ の場合が本質的

C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ C^0 級

すごいことを言っている

解析の講義を復習して欲しい

Def 3.1.4: $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, f は U 上 C^k 級

Section 3.1 終

Section 3.2 : C^∞級関数の各種構成

Prop 3.2.1: n変数多項式関数は $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞級

Prop 3.2.2: $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha$$

は $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞級

この関数の定義はまったく自明でない事に注意.

Prop 3.2.3 : $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}$: 空でない開集合.

$g : U \to \mathbb{R}$, $h : V \to \mathbb{R}$: C^∞級関数.

$V \cap g(U) \neq \emptyset$ とする.

このとき

$f := h \circ g : \underbrace{U \cap g^{-1}(V)}_{\neq \emptyset} \to \mathbb{R}$ は

$U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^∞級

Ex 3.2.4 $U := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$ とする. (open ball)

このとき $f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

は U 上 C^∞ 級

Proof : $g : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ は

多項式関数なので C^∞-級 ($\because$ Prop 3.2.1)

また $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ は C^∞-級 ($\because$ Prop 3.2.2)

U と g の定義より $g^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = U$ に注意すると

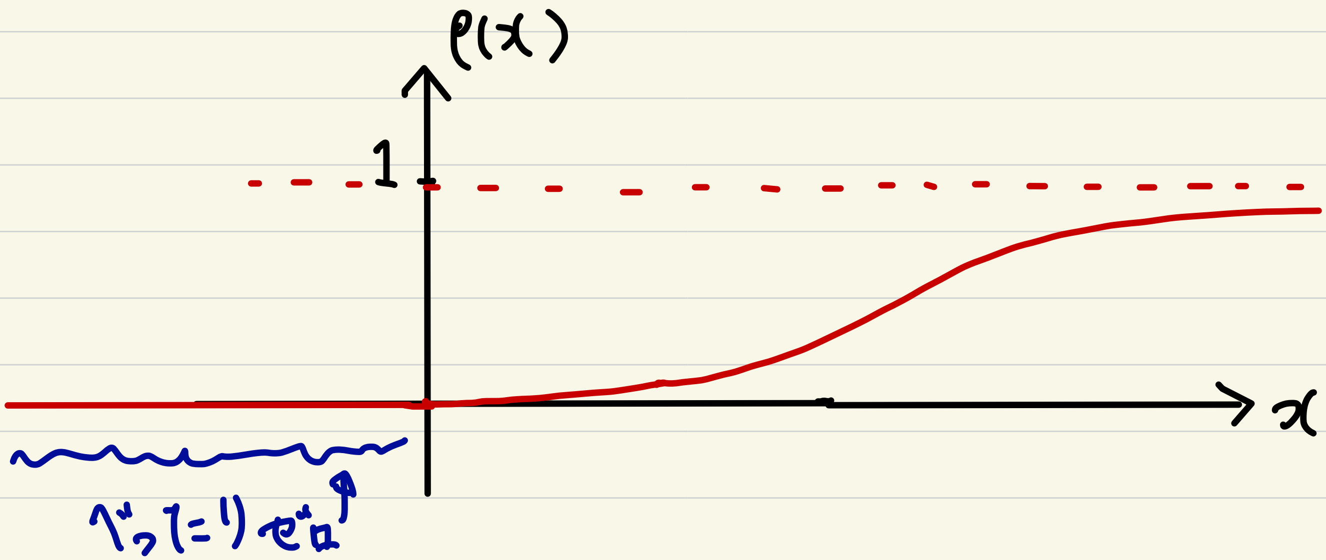
$f = h \circ g : \underset{U \cap g^{-1}(\mathbb{R}_{>0})}{\overset{\shortparallel}{U}} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ は U 上 C^∞-級

($\because$ Prop 3.2.3)

Ex 3.2.5

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (\text{if } \cancel{x \geq 0}\ x > 0) \\ 0 & (\text{if } \cancel{x < 0}\ x \leq 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級



Remark: C^∞ 級であってもテイラー展開可能とは限らない.

次の定理は Section 3.4 で用いる.

Theorem 3.2.6

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2$ とする.

このとき C^∞ 級関数 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であって

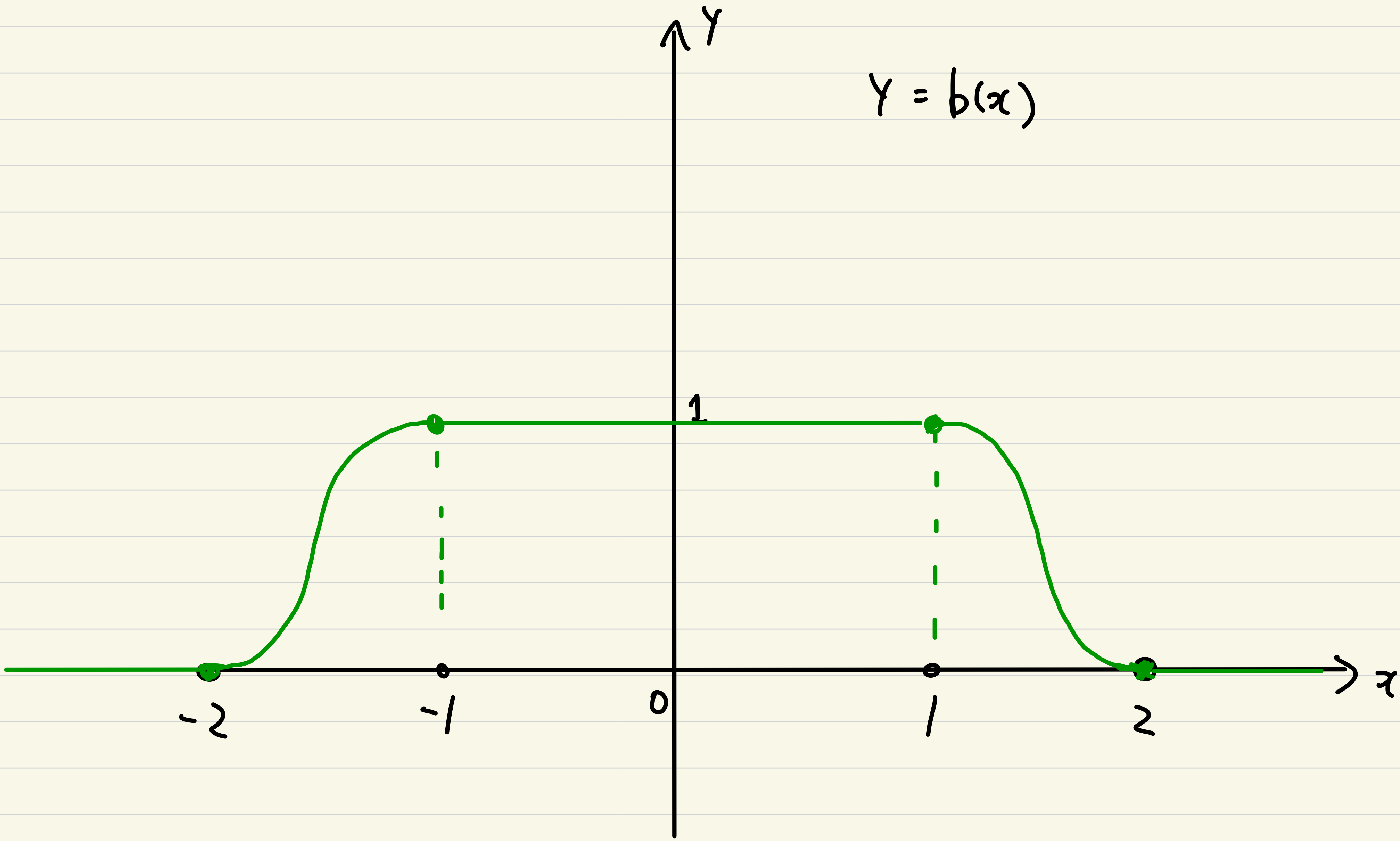
以下を満たすものが存在する.

(i) $b(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i)^2} \leq r_1$

(ii) $b(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \geq r_2$ $\rightsquigarrow$ supp b は compact cf. Ex 2.2.5

(Remark : $\mathbb{C}$ 上の正則関数 f が "supp f は compact" を満たすなら $f \equiv 0$ (Liouville の定理) (複素解析で習う))

$n=1,\ p=0,\ r_1=1,\ r_2=2$ の場合のイメージ



Thm 3.2.6 の証明の Hint:

Recall: $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t>0) \\ 0 & (t \leqq 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞-級 (Ex 3.2.5)

$$b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\rho(r_2 - \|x-p\|)}{\rho(\|x-p\| - r_1) + \rho(r_2 - \|x-p\|)}$$

とおけば OK.

Section 3.2 終

Section 3.3 : C^∞級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合

記号 : $C(U)$: U 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

(cf. Ex. 2.10)

以下の様に記号を定める.

Def 3.3.1:

$C^k(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は C^k 級$\} \subset C(U)$

$(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

$C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級$\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) \subset C(U)$

重要

Theorem 3.3.2: $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$C^k(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

(証明の要点をすぐ後で述べる)

Cor 3.3.3: $C^\infty(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

特に $C^\infty(U)$ は $\mathbb{R}$ 代数.

$$\left(\because\ C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U), \quad \text{Thm 3.3.2, Prop 2.2.4 and 2.2.2} \right)$$

Thm 3.3.2 の証明の要点：以下の命題を用いて
kについての帰納法です。

Prop 3.3.4：$k \geq 1$ とする。各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^k(U) \to C(U), \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

は well-defined であり、以下が成り立つ：

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (\forall f, g \in C^k(U))$$

$$\frac{\partial (\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\forall f \in C^k(U), \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (\forall f, g \in C^k(U))$$

(ライプニッツ則)

C(U) における積

図

Cor 3.3.3 と Prop 3.3.4 から次も得られる.

Prop 3.3.5 : 各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

は $C^\infty(U)$ 上の線型作用素であり,

以下のライプニッツ則を満たす

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i} \quad ({}^\forall f, g \in C^k(U))$$

$C^\infty(U)$ における積

以下の点は注意が必要

Prop 3.3.6 : $n \geq 1$ とする (Recall : $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$: open)

このとき $C^\infty(U)$ は実ベクトル空間として無限次元

(有限基底は存在しない)

証明のアイディア

bold体のつもり

$\boldsymbol{x}_1 : U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1$ とおく, $U \subset \mathbb{R}^n$

(この講義では "座標関数" は bold体の記号で表す)

任意の $N \in \mathbb{N}$ について

「$\underbrace{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1^N}_{\text{多項式 (cf. Prop 3.2.1)}} \in C^\infty(U)$ は一次独立」を示せば十分

確認せよ

"線型作用素 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ を何回か当ててみる" と示せる.

Section 3.3 終

Section 3.4: 考と答

試験範囲外

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Question: $U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合とする.

$C^\infty(U')$ と $C^\infty(U)$ の関係は?

Answer: $C^\infty(U)$ から $C^\infty(U')$ への自然な $\mathbb{R}$ 代数準同型である.

これは一般には単射でも全射でもない

(でも"局所的には同型である")

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空ではない開集合

$p \in U$ とする.

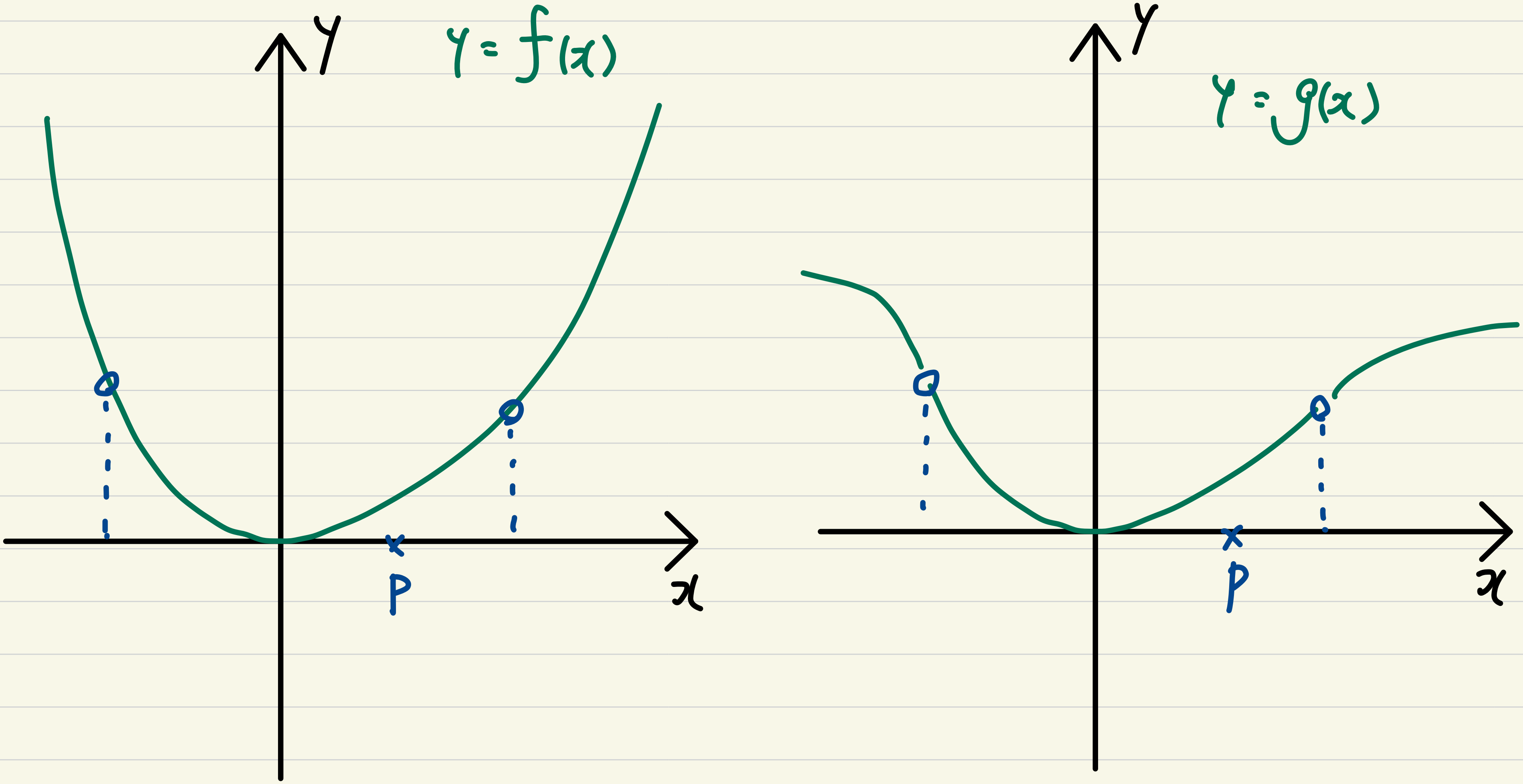
Def 3.4.1 : $C^\infty(U)$ 上の二項関係 $\sim_p$ を

各 $f, g \in C^\infty(U)$ に対して

$f \sim_p g \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists V$: p の開近傍 in U s.t. $f|_V = g|_V$

と定める.

Prop 3.4.2 : $\sim_p$ は $C^\infty(U)$ 上の同値関係



$\sim_p$ の意味 : p のまわりで同じ

Def 3.4.~~2~~3 各 $f \in C^\infty(U)$ について f の $\sim_p$ による同値類を

$$[f]_p := \{ g \in C^\infty(U) \mid f \sim_p g \} \subset C^\infty(U)$$

と定める.

$[f]_p$ を f の p における芽 (germ) と呼ぶ

Theorem 3.4.~~3~~4 商集合 $C_p^\infty(U) := C^\infty(U)/\sim_p$ には

商写像 $C^\infty(U) \to C_p^\infty(U)$ が $\mathbb{R}$代数準同型

となるような $\mathbb{R}$代数~~準同型~~ の構造が一意

（修正）

に定まる.

i.e.

和 $$[f]_p + [g]_p = [f+g]_p$$

スカラー倍 $$\lambda [f]_p = [\lambda f]_p \qquad \left(\begin{array}{c} f, g \in C^\infty(U) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

積 $$[f]_p \cdot [g]_p = [f \cdot g]_p$$

は $C_p^\infty(U)$ 上 well-defined で $\mathbb{R}$代数の構造を定めている

Def 3.4.~~4~~5 : ℝ代数 $C_p^\infty(U)$ を $C^\infty(U)$ の p における茎 (stark) と呼ぶ

($C^\infty(U)$ において p のまわりの局所的な様子をみている.)

Remark : よく勉強している人向け注意.

この講義では"層"の概念は
(定義が大変なので) 表に出さない.

上記 stark の定義は
"C^∞級関数の層の p における stark"
と結果的に同じものとみなせる
この節の後半も見よ.

Prop 3.4.~~5~~6 各 $i=1,\cdots,n$ について

$C^\infty(U)$ 上の線型作用素 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (cf. Prop 3.3.5)

は $C_p^\infty(U)$ 上の線型作用素を誘導する.

(i.e. $C_p^\infty(U) \to C_p^\infty(U),\ [f]_p \mapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_p$

は well-defined で, 線型写像.)

Prop 3.4.~~6~~7 $n \geq 1$ とする.

このとき $C_p^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元

(Hint : 多項式関数を考えよ)

以下, $U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合とする.

Prop 3.4.~~7~~8 :

制限 $\mathrm{rest}^U_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U'),\ f \mapsto f|_{U'}$

は well-defined であり, $\mathbb{R}$ 代数準同型

(cf. Ex 2.2.8 と関係あり)

Prop 3.4.$\cancel{8}$9: $\mathrm{rest}^U_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U')$ は単射とは限らない
全射とも限らない

例①: $U = \mathbb{R}$, $U' = (-\infty, 0)$ とする.

U 上のゼロ関数 O_U と Ex 3.2.5 の ρ を考える.

このとき $O_U \neq \rho$ on U だが

$$(O_U)|_{U'} = \rho|_{U'} = \text{ゼロ関数 on } U'$$

例②: $U = \mathbb{R}^2$, $U' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする.

原点を気にしなくてよい

$g : U' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ とおくと $g \in C^\infty(U')$

しかし "$f \in C^\infty(U)$ であって $f|_{U'} = g$" となる $f \in C^\infty(U)$

は存在しない. (原点で C^∞ 級に作れない)

$\mathrm{rest}^{U}_{U'}$ は局所的には同型である.

Theorem 3.4.~~9~~10: $p \in U' (\subset U)$ とする.

$\mathrm{rest}^{U}_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U')$ は

$C^\infty_p(U)$ から $C^\infty_p(U')$ への $\mathbb{R}$ 代数同型を

誘導する.

i.e. $C^\infty_p(U) \to C^\infty_p(U'),\ [f]_p \mapsto [f|_{U'}]_p$

は well-defined, $\mathbb{R}$代数準同型, 全単射

(特に全射性は簡単でない)

Thm 3.4.~~9~~ 10 : 全射性の証明の概略

任意に $g \in C^\infty(U')$ をとる.

示) $\exists f \in C^\infty(U)$ s.t. $f|_{U'} \sim_p g$

(示すべき事)

p の r 開近傍

実数 $r > 0$ を $U_r(p) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < r \}$

$\subset U'$ となるようにとる.

(U' は open in $\mathbb{R}^n$ なので
このような $r > 0$ が存在)

$r_1 = \frac{1}{2} r$, $r_2 = r$ として

定理 3.2.6 の $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる.

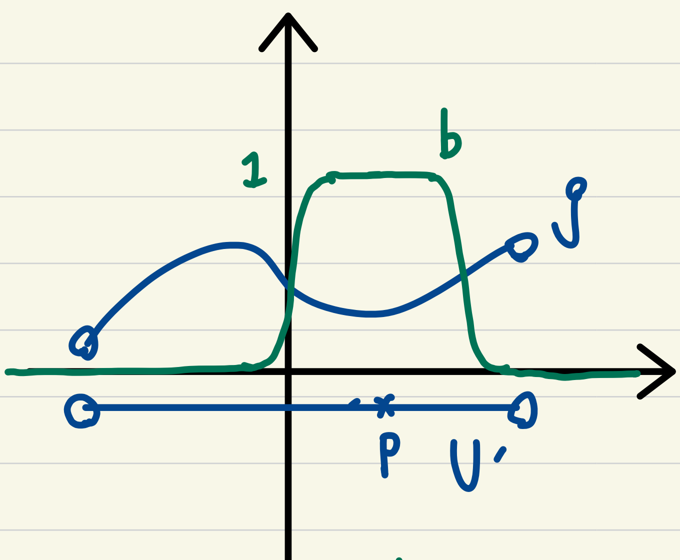
つづき

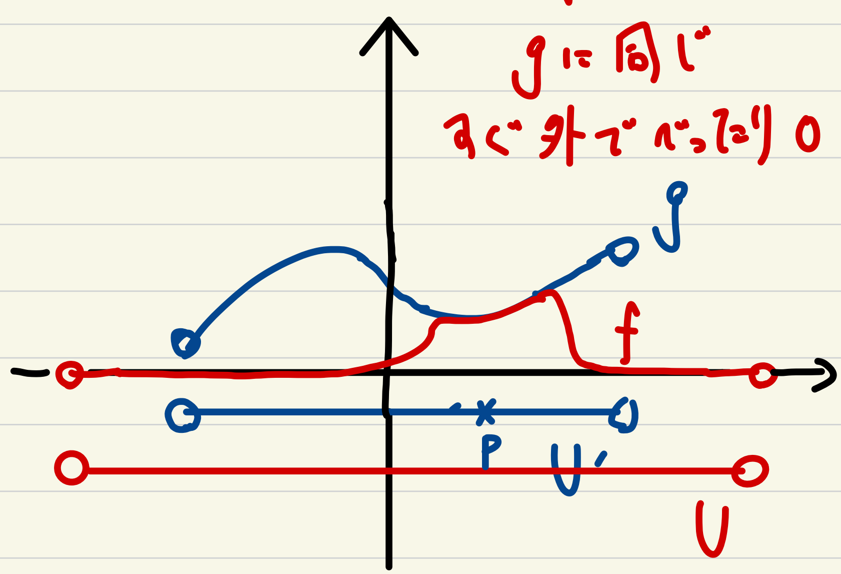
ここで $f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} b(x)\cdot g(x) & (\text{if } x \in U') \\ 0 & (\text{if } x \notin U') \end{cases}$

と定める.

このとき $f \in C^\infty(U)$ が確認できる.

$n=1$ の場合のイメージ





f は p のまわりで g に同じ
すぐ外でぺったり 0

b は p のまわりでぺったり 1
すぐ外でぺったり 0

ツヅキ

この $f \in C^\infty(U)$ について

$$f|_{U'} \sim_p g$$ を示せばよい.

b と f の定義より

$U_{\frac{1}{2}r}(p)$ 上で f と g は等しい

$\subset U'$

これより $f|_{U'} \sim_p g$ ∎

$p \in \mathbb{R}^n$ を固定したとき

"$C_p^\infty(U)$ は p の開近傍 U のとり方に依らない"

つまり以下が成り立つ：

U_1, U_2 を p の開近傍としたとき

$$C_p^\infty(U_1) \xrightarrow[\mathrm{rest}^{U_1}_{U_1 \cap U_2}]{\sim} C_p^\infty(U_1 \cap U_2) \xleftarrow[\mathrm{rest}^{U_2}_{U_1 \cap U_2}]{\sim} C_p^\infty(U_2)$$

により，$C_p^\infty(U_1)$ と $C_p^\infty(U_2)$ は自然に同型.

Section 3.4 終