Section 5：ベクトル場

意義："C^∞級関数のなす$\mathbb{R}$代数"の言葉でベクトル場を定義する.

Part I：多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$代数
3 C^∞級関数
4 方向微分
5 ベクトル場 (次)
6 写像の微分

内容

- C^∞級ベクトル場の定義
- ベクトル場と接ベクトル
- ベクトル場の bracket 積
- 偏微分方程式（見学）
- ベクトル場の座標表示 試験範囲外

Section 5.1 : C^∞級ベクトル場

この節ではベクトル場を代数的に定義する.

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($n \geq 1$を想定してよい)

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合

記号 :

$C^\infty(U)$: U上C^∞級関数のなす$\mathbb{R}$代数

$$\mathrm{End}(C^\infty(U)) := \mathcal{L}(C^\infty(U), C^\infty(U))$$

$C^\infty(U)$上の線型作用素のなすベクトル空間

(ひとまず$\mathbb{R}$代数構造は考えない)

Remark "入力"と"出力"に注意

	入力	出力
$C^\infty(U)$の元	Uの元	$\mathbb{R}$の元
$\mathrm{End}(C^\infty(U))$の元	$C^\infty(U)$の元	$C^\infty(U)$の元
	入力 U の元, 出力 $\mathbb{R}$ の元	入力 U の元, 出力 $\mathbb{R}$ の元

Def. 5.1.1:

$X \in \mathrm{End}(C^\infty(U))$ が U 上の (C^∞級) ベクトル場

以降，省略する

$\overset{\text{def}}{\iff}$ X は以下の条件を満たす：

条件（場のライプニッツ則）：

ここだけの用語

$$X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$$

$C^\infty(U)$ の積

$$\left({}^\forall f, g \in C^\infty(U) \right)$$

Remark：慣習的に "$X(f)$" の括弧は

"混乱のない限り" 省略する.

ベクトル場の重要例

Prop 5.1.2 : 各 $i = 1, \cdots, n$ について

偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

は U 上のベクトル場.

(cf. Prop 3.3.5)

記号の準備

Def. 5.1.3 :

$$\mathfrak{X}^\infty(U) := \{ X \in \mathrm{End}(C^\infty(U)) \mid X \text{ は } U \text{ 上のベクトル場} \}$$

Prop. 5.1.4 :

$\mathfrak{X}^\infty(U)$ は $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ の線型部分空間

ベクトル場の"関数倍"

Prop 5.1.5：各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $h \in C^\infty(U)$ について

$$hX : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h \cdot (Xf)$$

は U 上のベクトル場

$C^\infty(U)$ の積

すぐ後で証明を紹介する.

Remark：$Xh \in C^\infty(U)$, $hX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$

順番に注意

少し準備する.

Lemma 5.1.6

各 $h \in C^\infty(U)$ について

$$L_h : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto h\cdot f$$ とおく.

このとき L_h は線型写像

(Hint: $C^\infty(U)$ の積は双線型)

Proof of Prop. 5.1.5 :

$X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $h \in C^\infty(U)$ を任意にとる.

示 ① hX は線型.

② hX は場のライプニッツ則を満たす.

① について

定義から $hX = L_h \circ X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$

X と L_h はそれぞれ線型 (by Lemma 5.1.6)

なので $hX = L_h \circ X$ も線型.

① は OK.

つづき

② について

(示) $\forall f, g \in C^\infty(U)$

$$(hX)(f\cdot g) = ((hX)f)\cdot g + f\cdot((hX)g)$$

$f, g \in C^\infty(U)$ を任意にとる.

このとき $(hX)(f\cdot g) = h\cdot(X(f\cdot g))$

$= h\cdot((Xf)\cdot g + f\cdot(Xg))$ ($\because$ X はライプニッツ則をみたす)

$= h\cdot((Xf)\cdot g) + h\cdot(f\cdot(Xg))$ ($\because$ $C^\infty(U)$ の積は双線型)

$= (h\cdot(Xf))\cdot g + f\cdot(h\cdot(Xg))$ ($\because$ $C^\infty(U)$ は結合的, 可換)

$= ((hX)f)\cdot g + f\cdot((hX)g)$ ($\because$ 定義)

図

Cor 5.1.7 : $h_1, \cdots, h_n \in C^\infty(U)$ について

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

は U 上のベクトル場

実は すべてのベクトル場は この形で書ける.

Theorem 5.1.8 :

ベクトル空間としての直和

$$\Upsilon : \underbrace{C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)}_{n \text{コ}} \to \mathcal{X}^\infty(U)$$

$$\psi \qquad\qquad \psi$$

$$(h_1, \cdots, h_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

は線型同型写像

Theorem 5.1.8 :

ベクトル空間としての直和

$$\Upsilon : \underbrace{C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)}_{n} \to \mathfrak{X}^\infty(U)$$

$$\in \qquad\qquad\qquad \in$$

$$(h_1, \cdots, h_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

は線型同型写像

Cor 5.1.9 : $\mathfrak{X}^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元

Section 5.5 で Thm 5.1.8 の証明を紹介する.

"関数倍"は以下のような代数的によい性質を持つ

Prop 5.1.10: $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は単位的 $C^\infty(U)$ 加群.

すなわち以下が成り立つ:

(1) 写像

$$C^\infty(U) \times \mathfrak{X}^\infty(U) \to \mathfrak{X}^\infty(U)$$
$$(h, X) \mapsto hX$$

は双線型

Section 5.1 終

(2) 各 $h_1, h_2 \in C^\infty(U)$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について

$$h_1(h_2 X) = (h_1 \cdot h_2) X \quad \text{in } \mathfrak{X}^\infty(U)$$

(3) 各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について

$$1_U X = X$$

(ただし $1_U : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$)

Section 5.2 : ベクトル場と接ベクトル

この節では

「ベクトル場は各点に接ベクトルが定まったもの」

||

方向微分

という幾何的なイメージを紹介する.

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合

記号 : $\mathfrak{X}^\infty(U)$: U 上のベクトル場のなす
ベクトル空間

Def. 5.2.1 : $p \in U$ とする.

各 $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について

pを代入

$$X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \underbrace{(Xf)}_{\in C^\infty(U)}(p)$$

とおく

Prop 5.2.2 : $X_p \in T_pU$ (for any $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $p \in U$).

Prop 5.2.3 : $\mathfrak{X}^\infty(U) \to T_pU,\ X \mapsto X_p$

は線型写像

Prop 5.2.4: $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について以下の二条件は同値

(i) $X = Y$ in $\mathfrak{X}^\infty(U)$.

(ii) $\forall p \in U$, $X_p = Y_p$ in T_pU.

Remark: "ベクトル束"を知っている人向け注意：

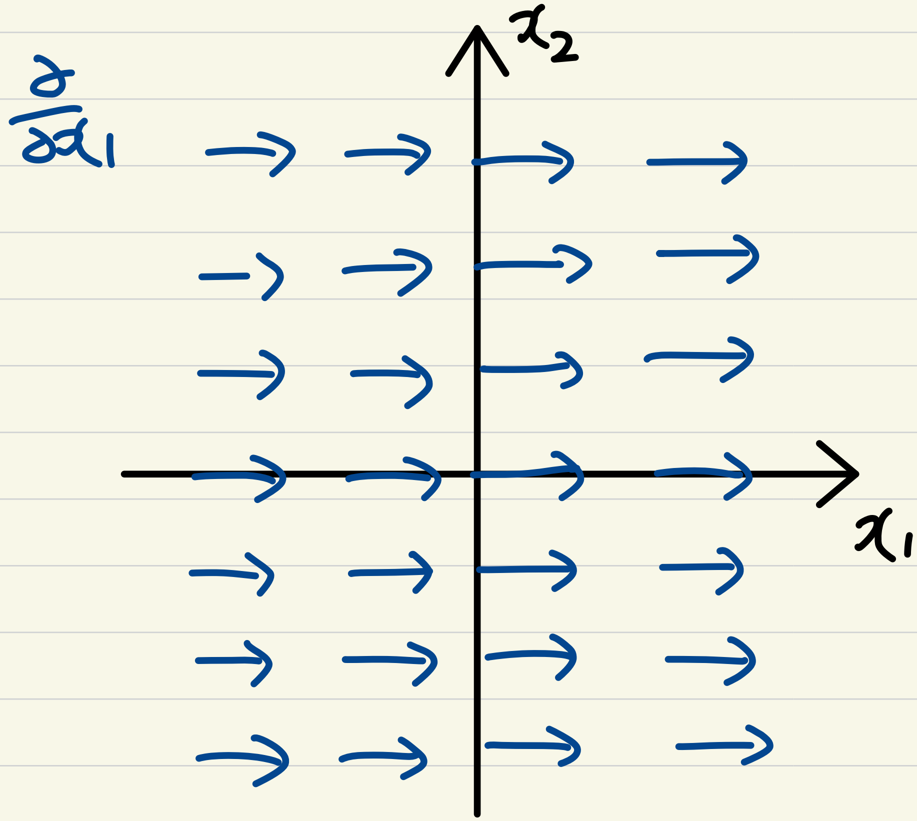
$X : U \to T(U) = \bigsqcup_{p \in M} T_pU$: C^∞級切断

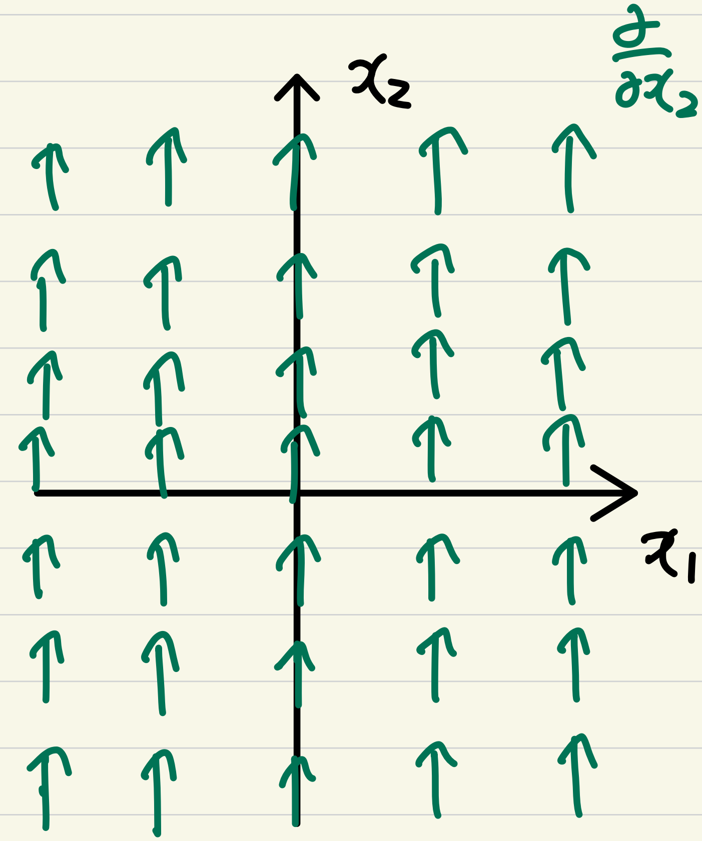
$p \mapsto X_p$

と思ってもよい.

<u>Ex. 5.2.5:</u> $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ は

それぞれ 以下のイメージ



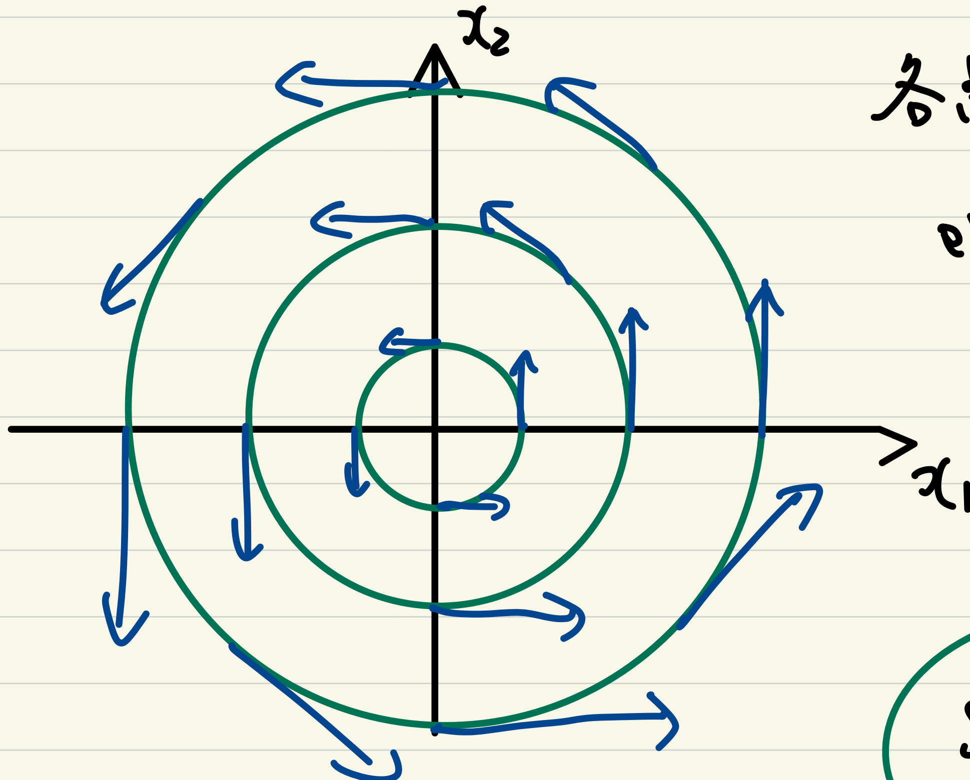


各点から ベクトル e_1 が生えている　　各点から ベクトル e_2 が生えている.

Ex. 5.2.6

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$$

は以下のイメージ



各点 $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ には
ベクトル $(-p_2, p_1)$ が生えている。

Section 5.2
終

追加スライド

考え方：

$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$ について

$p = (p_1, p_2)$ とすると

$$X_p = -\overset{(-x_2)(p)}{p_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \overset{x_1(p)}{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$$

これは $\underline{(-p_2, p_1) \text{ を方向微分}}$

(cf. Prop 4.1.6 & 4.3.3)

各点 $p = (p_1, p_2)$ から ベクトル $(-p_2, p_1)$ が生えているとみなす.

Section 5.3 : ベクトル場の bracket 積

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空ではない開集合

まず以下に注意

Prop 5.3.1 : $n \geq 1$ とする.

このとき $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は写像の合成で閉じてない.

i.e. $^\exists X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ s.t. $X \circ Y \notin \mathfrak{X}^\infty(U)$

$(\in \mathrm{End}(C^\infty(U)))$

以下では $\mathfrak{X}^\infty(U)$ に
Lie 代数と呼ばれる構造を定める。
(ℝ代数の一種)

言葉の準備

Def. 5.3.2: $(V, [\,,\,])$ を ℝ代数とする。

$(V, [\,,\,])$ が Lie 代数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall u, v, w \in V$,

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + [v, [u, w]]$$

(Jacobi 律)

Prop 5.3.3 : $\mathrm{End}(C^\infty(U))$ 上の二項演算 $[\ ,\ ]$ を

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1 \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{End}(C^\infty(U)))$$

と定める。ただし "$\circ$" は写像の合成とする。

このとき $(\mathrm{End}(C^\infty(U)), [\ ,\ ])$ は Lie 代数

(cf. Ex 2.3.5)

Prop 5.3.4 : Lie 代数の部分 $\mathbb{R}$ 代数は Lie 代数

Prop 5.3.5 : $\mathfrak{X}^\infty(U)$ は $(\mathrm{End}(C^\infty(U)), [\,,\,])$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

特に $(\mathfrak{X}^\infty(U), [\,,\,])$ は Lie 代数

Hint : 示 $[X, Y] : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ は ① 線型 ② 場のライプニッツ則を満たす.

Recall : Prop 5.3.1 に注意.

特に $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ について

XY, YX は $\mathfrak{X}^\infty(U)$ の元でないけれども

$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$.

bracket積のイメージ

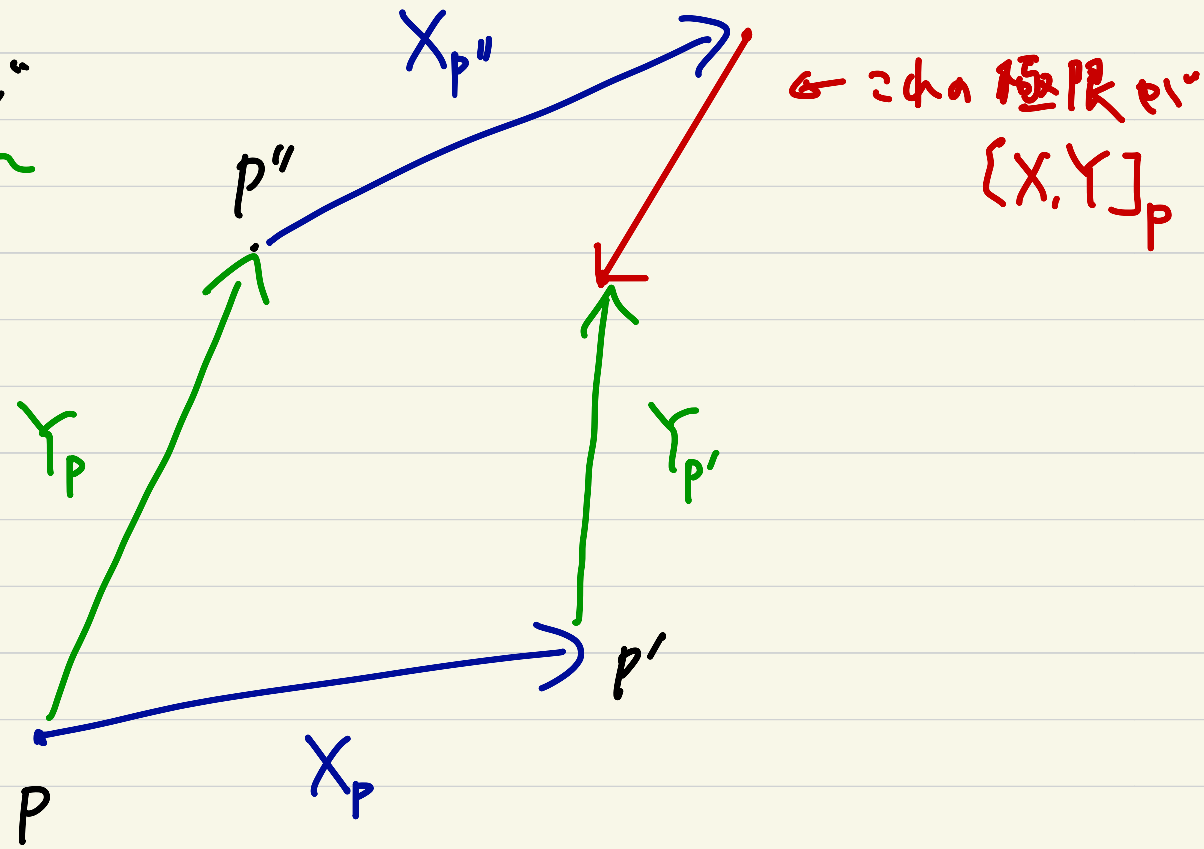
$[X, Y]$ は

X による flow と

Y による flow の

"非可換性"

を表す.



Ex 5.3.6

$$X = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \left(\begin{array}{l} h_i, g_j \in C^\infty(U), \\ i,j = 1, \cdots, n \end{array} \right)$$

とする.

このとき

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} h_l \frac{\partial g_k}{\partial x_l} - g_l \frac{\partial h_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

となる.

特に $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \quad ({}^\forall i, j)$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f \quad ({}^\forall f \in C^\infty(U)) \right)$$

Section 5.3 終

Section 5.4 : 偏微分方程式（見学）

"偏微分方程式（PDE）" の例を
ベクトル場の言葉で紹介する.

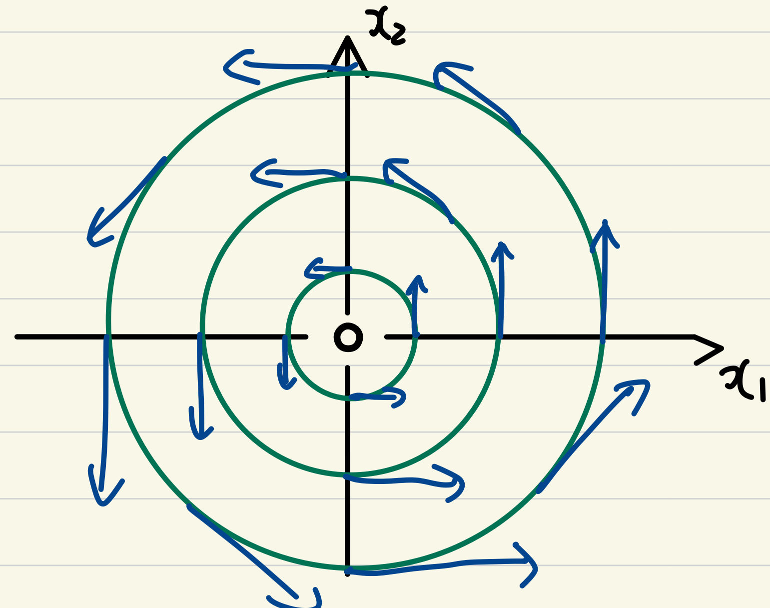
設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合

Ex. 5.4.1　$n=2$, $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(U)$$ とおく.

X のイメージ



PDE : "$Xf=0$"
(1階線型)

解空間 :

$$\{f\in C^\infty(U) \mid Xf=0\}$$

$\parallel$ 解いた

$$\{f\in C^\infty(U) \mid {}^\exists k\in C^\infty((0,\infty)),\ f(x_1,x_2)=k\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\ (\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2)\}$$

$\ddot{\parallel}$

$\operatorname{Ker} X$

$C^\infty(U)$ の線型部分空間

Ex. 5.4.2

$n = 2,\quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

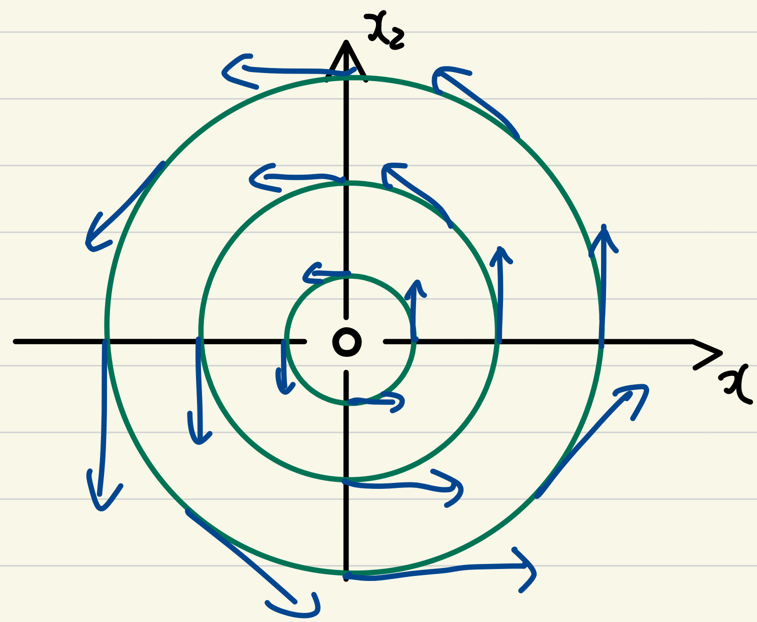
$$X = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathfrak{X}^\infty(U)$$ とおく.

PDE : " $Xf = f$ " (1階線型)

解空間 :

$$\{ f \in C^\infty(U) \mid Xf = f \} = \{ 0_U \}$$

X のイメージ



"大域解" は ゼロしかない (Uの形が影響している)

(局所解は "生えていよ")

Ex. 5.4.3 (一般の設定)

$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ とする.

PDE: "$XYf = 0$" (2階線型)

解空間 $\{ f \in C^\infty(U) \mid XYf = 0 \}$

$\parallel$

$\operatorname{Ker} XY$

$C^\infty(U)$ の線型部分空間 ということは分かる.

どんな形の解があるか具体的に調べないとわからない

Ex 5.4.4 (一般の設定)

$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ とする.

PDE : "$XYf = 1_U$" (2階非線型)

解空間 $\{ f \in C^\infty(U) \mid XYf = 1_U \}$

"f, g が解 $\Rightarrow$ $f - g \in \mathrm{Ker}\, XY$"
($C^\infty(U)$ の線型部分空間)

$\rightsquigarrow$ 解空間は $C^\infty(U)$ 内の"アファイン平面"

Section 5.4 終

Section 5.5 : Theorem 5.1.8 の証明

試験範囲外

Theorem 5.1.8 (再掲)

$$\Upsilon : \underbrace{C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)}_{n_1} \to \mathcal{X}^\infty(U)$$

$$\rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$}$$

$$(h_1, \cdots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

は線型同型写像

Well-defined であることは Cor 5.1.6 から従う.

線型性, 単射性, 全射性 をそれぞれ示せばよい.

Prop 5.5.1 : Υ は線型 (証明略)

Prop 5.5.2 : Υ は単射.

Proof : Prop 5.5.1 より Υ は線型なので,

以下を示せば十分

示 $\forall (h_1, \cdots, h_n) \in C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)$

with $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$,

$(h_1, \cdots, h_n) = (0, \cdots, 0)$

$(h_1, \cdots, h_n) \in C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)$ with $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$

を任意にとる.

つづき

示 $(h_1, \cdots, h_n) = (0, \cdots, 0)$

$j = 1, \cdots, n$ を任意にとる.

示 $h_j = 0$

$x_j : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_j$ は U 上 C^∞ 級

(cf. Prop 3.2.1)

よって $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

これより $0 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)}_{=0}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} h_i \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = h_j$

∎

Prop 5.5.3 : $\mathfrak{X}$ は全射

Proof : $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ を任意にとる.

示 $\exists (h_1, \cdots, h_n) \in C^\infty(U) \oplus \cdots \oplus C^\infty(U)$

s.t. $X = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

各 $i = 1, \cdots, n$ について

$x_i : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$ は U 上 C^∞ 級.

(cf. Prop 3.2.1)

$h_i := X x_i \in C^\infty(U)$ とおく.

示 $X = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

つづき

Prop 5.2.2 より 以下を示せば OK

示 $\forall p \in U,\quad X_p = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

$p \in U$ を任意にとる.

示 $X_p = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$

ここで $X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (\because \text{Prop } 4.5.7)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X x_i)(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

∎

Section 5.5 終