Section 6: 写像の微分

意義: "C^∞級関数のなす$\mathbb{R}$代数"の言葉で

C^∞級写像とその全微分を定義する.

Part I: 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$代数

3 C^∞級関数

4 方向微分

5 ベクトル場

6 写像の微分 (本)

7 合成写像の微分

内容

- C^∞級写像の定義
- 写像の全微分
- 全微分の行列表示 (Jacobi 行列)
- 全微分の解析的意味付け

試験範囲外

Section 6.1 : C^∞級写像

この節では C^∞級写像の代数的定義を述べる.

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$: 空でない開集合

記号 各 $i=1,2$ について

$C^\infty(U_i)$: U_i 上の C^∞級関数全体のなす $\mathbb{R}$代数

連続写像

$\varphi : U_1 \to U_2$ について考える。

$U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$

記号：$\varphi^* : C(U_2) \to C(U_1)$

$f \mapsto f \circ \varphi$

φ に引き戻し

（$\mathbb{R}$ 代数準同型

cf. Ex 2.2.8）

C^∞級写像の定義

Def 6.1.1　抽象論に使いやすい定義

連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞級写像

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$$

Prop 6.1.2 : $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞級とする.

このとき $\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1),\ f \mapsto f \circ \varphi$

は $\mathbb{R}$代数準同型

C^∞級写像の同値な言い換え

Prop 6.1.3: 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について以下は同値

(i) φ は Def 6.1.1 の意味で C^∞級

(i.e. φ は連続かつ $\varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$)

$\Updownarrow$

(ii)
$$\varphi : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$$
$$x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$$

と書いたとき $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n_2} \in C^\infty(U_1)$

計算で確認しやすい条件

すぐ後で証明を紹介するよ.

Ex. 6.1.4　$n_1 = n_2 = 2$

$U_1 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_1 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

$U_2 := \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1,\ y_2 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

このとき

$\varphi : U_1 \to U_2,\quad (x_1, x_2) \mapsto \left(\overset{x_2}{\cancel{x_1}}, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right)$

は well-defined で C^∞ 級 (cf. Prop 6.1.3)

この写像は後々で球面の可微分構造の構成に用いる.

Prop 6.1.3 の証明の準備①

Lemma 6.1.5

$y_j : U_2 \to \mathbb{R},\ y \mapsto y_j$ とおくと

$\varphi_j = \varphi^*(y_j)$ as $U_1 \to \mathbb{R}$

(実は φ_j の定義そのもの)

Prop 6.1.3 の証明の準備②

位相空間論の復習

Prop 6.1.6: X を位相空間, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする.

$\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積集合に積位相を定めたものとする.

このとき写像 $\varphi : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ について以下は同値
$x \mapsto (\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$

(i) $\varphi : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は連続

(ii) 各 $\lambda\in\Lambda$ について $\varphi_\lambda : X \to Y_\lambda$ は連続

Prop 6.1.3 の証明の準備③

記号

以下 $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}$ の記号を用い，

$U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{n_2}}$ の記号を用いる．

③ つづき

Prop 6.1.7 (連鎖律)

解析の復習

写像 $\varphi : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ について

$x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$

$\varphi_1, \cdots, \varphi_{n_2} \in C^1(U_1)$ とする.

このとき 任意の $f \in C^1(U_2)$ について $\varphi^*(f) \in C^1(U_1)$ かつ

各 $j = 1, \cdots, n_1$ について

$$\underbrace{\frac{\partial(\varphi^*(f))}{\partial x_j}}_{\in C(U_1)} = \sum_{i=1}^{n_2} \underbrace{\left(\varphi^*\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}}_{\in C(U_2)}\Big)\right)}_{\in C(U_1)} \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}}_{\in C(U_1)} \quad \text{on } U_1$$

Prop 6.1.3 の証明の概要

(i) $\Rightarrow$ (ii) : (i) を仮定して (ii) を示す.

$\psi_j : U_2 \to \mathbb{R},\ y \mapsto y_j$ とおくと

$\varphi_j = \varphi^*(\psi_j)$ となる ($\because$ Lemma 6.1.5)

$\psi_j \in C^\infty(U_2)$ なので $\varphi_j = \varphi^*(\psi_j) \underset{\text{(i)}}{\in} C^\infty(U_1)$

つづき

(ii) ⇒ (i)：(ii) を仮定して (i) を示す.

Prop 6.1.6 より φ は連続（確認せよ）.

「$\forall f \in C^k(U_2),\ \varphi^*(f) \in C^k(U_1)$」

を $k = 0, 1, 2, \cdots$ について帰納法で示す.

連鎖律 (Prop 6.1.7) を用いよ.

∎

Section 6.1 終

Section 6.2: C^∞級写像の全微分

この節では C^∞級写像の全微分を代数的に定義する.

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $\emptyset \neq U_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞級

$p \in U_1$

記号: $T_p U_1$: U_1 の p における接空間

$T_{\varphi(p)} U_2$: U_2 の $\varphi(p)$ における接空間

Recall: $\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1)$ は $\mathbb{R}$代数準同型

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

(cf. Prop 6.1.2)

Prop 6.2.1: 各 $y \in T_pU_1$ について

$$y \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}U_2$$

Hint: $y \in T_pU_1$ を任意にとる.

示 ① $y \circ \varphi^* : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$ は線型

② $y \circ \varphi^*$ は $\varphi(p)$ におけるライプニッツ則を満たす.

全微分の定義

Def 6.2.2

写像 $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$

$g \mapsto g \circ \varphi^*$

を φ の p における全微分とよぶ

(または単に"微分")

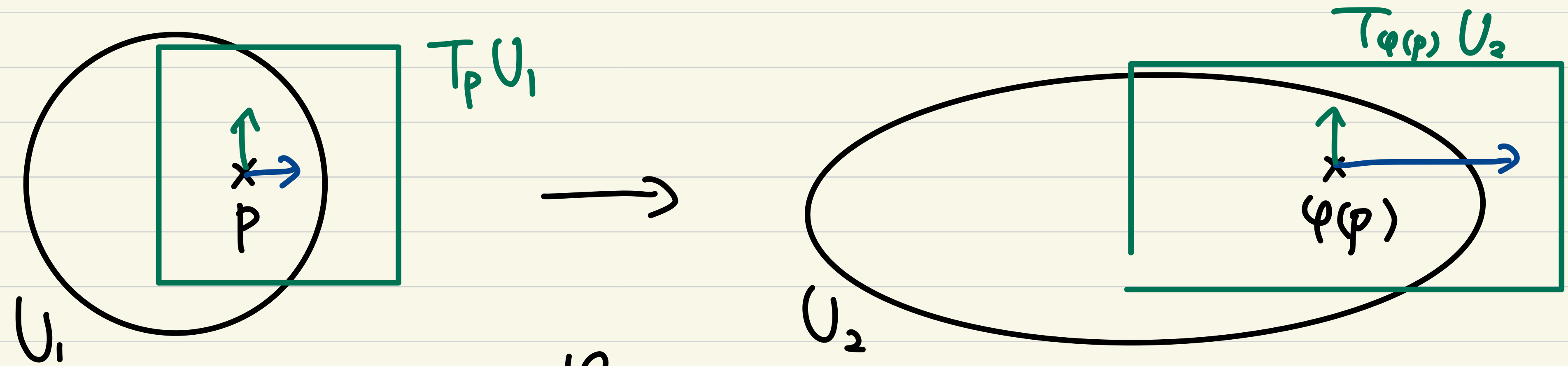
Prop 6.2.3

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ g \mapsto g \circ \varphi^*$

は線型写像

全微分は線型写像

"全微分" のイメージ



$$U_1 \xrightarrow{\varphi} U_2$$

線型近似

$$T_pU_1 \xrightarrow{(d\varphi)_p} T_{\varphi(p)}U_2$$

(解析的意味付けを Section 6.4 で、
幾何学的な意味付けを Section 7.3 で述べる)

Ex 6.2.4 $\quad n_1 = n_2 = 1, \quad U_1 = U_2 = \mathbb{R}.$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

Q : 各 $p \in \mathbb{R}$ について

$$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{d}{dx}\right)_p\right) = \boxed{??}\left(\frac{d}{dy}\right)_{\varphi(p)}$$

(Recall : $T_p\mathbb{R} = \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)_p\right\}, \quad T_{\varphi(p)}\mathbb{R} = \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{d}{dy}\right)_{\varphi(p)}\right\}$)

(1次元のときは "∂" ではなく "d" を使う
レポートや試験ではどちらで書いても ok とする)

スライド先行公開時と記号の使い方変えました.

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ を任意にとる.

$$\left((d\varphi)_p\left(\left(\frac{d}{dx}\right)_p\right)\right)(f) = \left(\left(\frac{d}{dx}\right)_p \circ \varphi^*\right)(f)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)_p (f \circ \varphi)$$

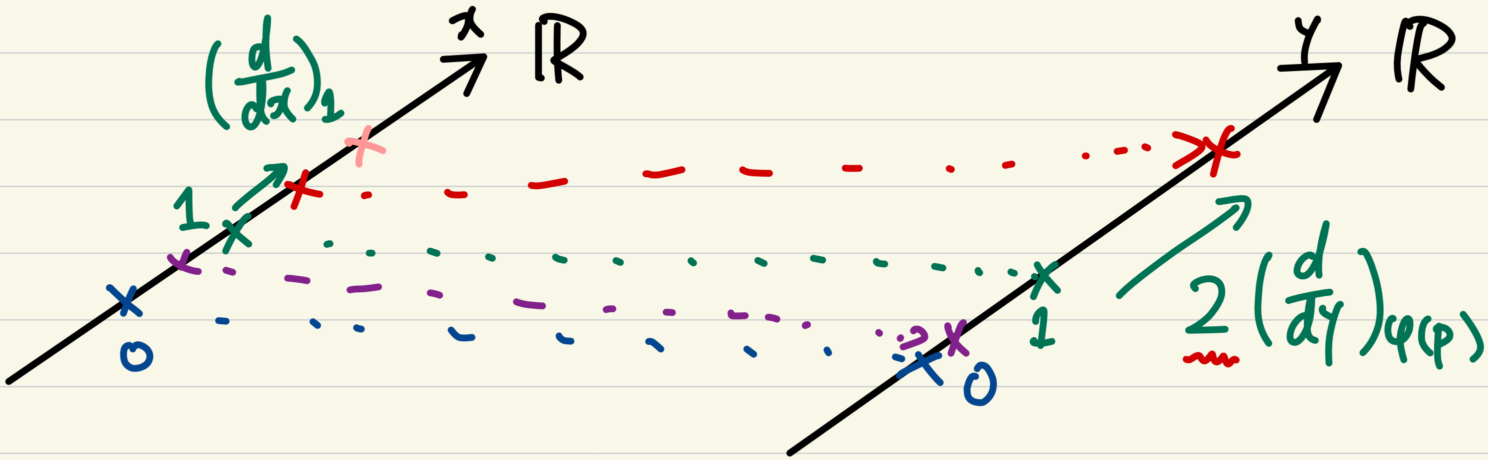
連鎖律

$$= \left(\frac{df}{dy}\right)(\varphi(p)) \cdot \underbrace{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)(p)}_{\varphi'(p)}$$

$$= \left(\varphi'(p) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)_{\varphi(p)}\right)(f)$$

これより $(d\varphi)_p\left(\left(\frac{d}{dx}\right)_p\right) = \varphi'(p) \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)_{\varphi(p)}$

$$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R} \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R},\quad a\left(\frac{d}{dx}\right)_p \longmapsto \varphi'(p)\cdot a\left(\frac{d}{dy}\right)_{\varphi(p)}$$



微分の精神は"平均変化率"(写像とみなす).
"接線の傾き"と思ってると理解が難しい.

全微分の計算法の一般論は Section 6.3 で述べる.

Section 6.2 終

Section 6.3：全微分の行列表示

この節では

C^∞ 級写像の全微分の行列表示を行う.

（線型写像）

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$ ： C^∞ 級写像

$p \in U_1$

記号：$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ \mathfrak{y} \mapsto \mathfrak{y} \circ \varphi^*$

φ の p における全微分

記号

以下 $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}$ の記号を用い,

$U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{n_2}}$ の記号を用いる.

Cor 4.3.6 より

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p \right\}$ は T_pU_1 の基底.

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)} \right\}$ は $T_{\varphi(p)}U_2$ の基底.

目標: 線型写像 $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ を

基底: $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p \right\}$, $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)} \right\}$

について行列表示する.

$$\varphi : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

$$x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$$ と書く.

Recall: Prop 6.1.2 より $\varphi_i \in C^\infty(U_1)$ $(i=1,\cdots,n_2)$

Def. 6.3.1:

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i=1,\cdots,n_2,\ j=1,\cdots,n_1} \in M(n_2, n_1 ; \mathbb{R})$$

を φ の p における Jacobi 行列 とよぶ.

Theorem 6.3.2 : Jacobi 行列 $(J\varphi)_p$ は

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ (線型写像)

の 表現行列 with respect to

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}_{j=1,\cdots,n_1}$ and $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right\}_{i=1,\cdots,n_2}$

i.e. $y = \sum_{j=1}^{n_1} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \quad (a_j \in \mathbb{R})$

$(d\varphi)_p(y) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)} \quad (b_i \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} = (J\varphi)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix}$$

図式

$$
\begin{tikzcd}
T_pU_1 \arrow[r, "(d\varphi)_p"] & T_{\varphi(p)}U_2 \\
\mathbb{R}^{n_1} \arrow[u, "\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p\right)"] \arrow[r, "(J\varphi)_p"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^{n_2} \arrow[u, swap, "\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)}\right)"]
\end{tikzcd}
$$

Ex 6.3.3 : $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $U_1 = \mathbb{R}^2$, $U_2 = \mathbb{R}^3$ とする.

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (\underset{\varphi_1(x_1,x_2)}{\underset{\parallel}{\cos x_1}}, \underset{\varphi_2(x_1,x_2)}{\underset{\parallel}{\sin x_2}}, \underset{\varphi_3(x_1,x_2)}{\underset{\parallel}{x_1 + x_2}})$$

は C^∞ 級写像 (cf. Prop. 6.1.3).

$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ を fix

このとき p における Jacobi 行列は

$$(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin p_1 & 0 \\ 0 & \cos p_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を fix.

Thm 6.3.2 より

$$(d\varphi)_p\left(\underbrace{\begin{matrix} a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \\ + \\ a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \end{matrix}}_{\in\, T_p\mathbb{R}^2}\right) = \underbrace{\begin{matrix} -a_1\cdot(\sin p_1)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} \\ a_2\cdot(\cos p_2)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} \\ + \\ (a_1+a_2)\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)} \end{matrix}}_{\in\, T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3}$$

$$\left(\because\ (J\varphi)_p\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1\sin p_1 \\ a_2\cos p_2 \\ a_1+a_2 \end{pmatrix}\right)$$

Thm 6.3.2 の証明の準備

Lemma 6.3.4 (Cor 4.5.7 の一部)

任意の $y \in T_{\varphi(p)}U_2$ について

$$y = \sum_{i=1}^{n} y(\psi_i)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$$

ただし $\psi_i : U_2 \to \mathbb{R},\ y \mapsto y_i$

Proof of Lemma 6.3.4

Cor 4.3.6 より $y = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$ $(b_i \in \mathbb{R})$ と一意に書ける。

"$\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_{\varphi(p)}(\psi_i) = \delta_{ik}$" に注意すると $y(\psi_i) = b_i$ ∎

Proof of Thm 6.3.2：$j=1,\cdots,n_1$ を任意にとる.

示 $$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)=\sum_{i=1}^{n_2}\left(\underbrace{(J\varphi)_p}_{}\right)_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)$$

Lemma 6.3.4 より 以下を示せば了

示 $$\forall i=1,\cdots,n_2,\ \left((d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)\right)(y_i)=\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)$$

$i=1,\cdots,n_2$ を任意にとる.

つづき

示 $\left((d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)\right)(y_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)$

左辺 $= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \circ \varphi^*\right)(y_i)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\left(\varphi^*(y_i)\right)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\varphi_i)$ (∵ Lemma 6.1.~~4~~ 5)

$= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p) =$ 右辺 ■

Section 6.3 終

Section 6.4 : 全微分の解析的意味付け

試験範囲外

写像の全微分について，解析的な意味を紹介する．

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞ 級写像

$p \in U_1$

記号 : $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ g \mapsto g\circ\varphi^*$

φ の p における全微分

$(J\varphi)_p = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i=1,\cdots,n_1,\ j=1,\cdots,n_2}$: φ の p における Jacobi 行列

Recall : $(J\varphi)_p$ は 自然な基底達についての

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ の 表現行列

Jacobi行列の解析的特徴付け

Theorem 6.4.1: $\|\cdot\|_1$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ 上のノルム、$\|\cdot\|_2$ を $\mathbb{R}^{n_2}$ 上のノルムとする(定義後述)

$n_2 \times n_1$ 行列 A についての以下の条件Ⓐを考える:

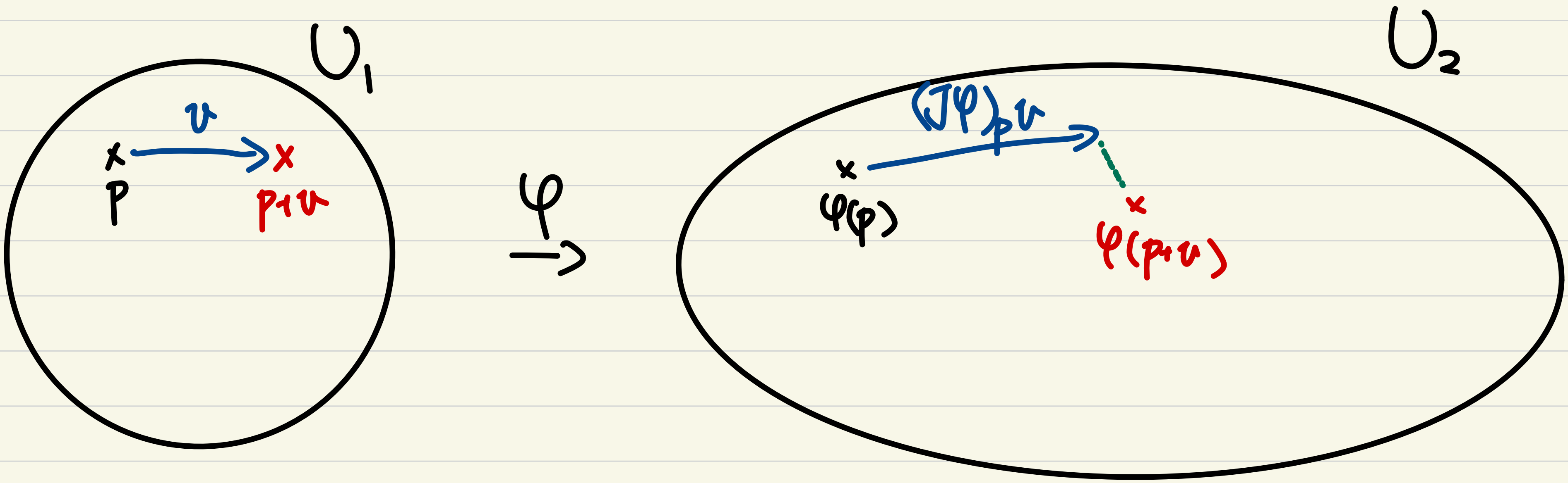
条件Ⓐ: $$\lim_{\substack{v \to 0 \\ (v \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus \{0\})}} \frac{\|\varphi(p+v) - \varphi(p) - A v\|_2}{\|v\|_1} = 0$$

縦ベクトルとみなしている。

このとき
行列 $(J\varphi)_p$ は条件Ⓐを満たす唯一の $n_2 \times n_1$ 行列である。

Remark: 条件Ⓐはノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ のとり方によらない。

ここでは Thm 6.4.1 の証明の詳細は述べないが、Remark の説明のみ述べておく。



気持ち： $\varphi(p+v) \fallingdotseq \varphi(p) + (J\varphi)_p v$

$\|v\|_1$ が十分小さいとき，誤差が $\|v\|_2$ に比べて非常に小さい

ノルムに関する準備:

以下しばらく、V を実ベクトル空間とする。

Def. 6.4.2: 写像 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ v \mapsto \|v\|$

が V 上のノルムであるとは、

以下の三条件を満たすこと:

絶対値

条件 (i) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

条件 (ii) $\forall v, w \in V,\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

条件 (iii) $\forall v \in V \setminus \{0\},\ \|v\| > 0$.

Prop. 6.4.3 : $\|\cdot\|$ を V 上のノルムとする.

このとき $d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$(v, w) \mapsto \|v - w\|$

は V 上の距離関数を定める.

Def. 6.4.4 : $\|\cdot\|$ を V 上のノルムとする.

距離関数 $d_{\|\cdot\|}$ の定める V 上の位相を

$\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ と書くことにする.

Def. 6.4.5 :

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ をそれぞれ V 上のノルムとする.

$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists} c, c' \in \mathbb{R}_{>0}$

s.t. ${}^{\forall} v \in V$, $c\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c'\|v\|_2$

{ノルム on V} 上の同値関係を定める.

Prop 6.4.6 :

V 上のノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{O}_{\|\cdot\|_2}$

Theorem 6.4.7 : V を有限次元実ベクトル空間とする.

このとき任意の2つのノルムは同値.

(証明はそこまで難しくない)

Cor 6.4.8 : 有限次元実ベクトル空間において,

"ノルムの誘導する位相" は一意.

(この位相を"標準的な位相"とよぶことが多い)

Remark : 無限次元ベクトル空間には

一般にはノルムの定める位相は

無数にある.

Thm 6.4.1 の後の Remark は次の命題と Thm 6.4.7 で説明できる.

Prop 6.4.9 : V, W を実ベクトル空間とする.

$\|\cdot\|_1^V, \|\cdot\|_2^V$ を V 上の同値なノルム,

$\|\cdot\|_1^W, \|\cdot\|_2^W$ を W 上の同値なノルムとする.

また D を 0_V の開近傍 in V とし,

Vのゼロ元

$\varphi : D \to W$ を写像とする.

このとき 以下は同値

(i) $\displaystyle \lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(v)\|_1^W}{\|v\|_1^V} = 0$

(ii) $\displaystyle \lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(v)\|_2^W}{\|v\|_2^V} = 0$

(証明は難しくない)

Thm 6.4.1 の証明の中心的アイデア

Thm 6.4.7, Prop 6.4.9 より

$\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ のノルムとして

$$\|v\| := \max_{j=1,\cdots,n_1} |v_j| \quad (v \in \mathbb{R}^{n_1})$$

$$\|w\| := \max_{i=1,\cdots,n_2} |w_i| \quad (w \in \mathbb{R}^{n_2})$$

を採用してよい.

ℓ^∞ ノルム

Section 6.4 終