Section 7：合成写像の微分

意義：C^∞級写像の合成，その全微分を調べる．
応用として全微分の幾何的解釈を与える．

Part I：多変数の微分論の代数化

Section 2　$\mathbb{R}$代数
3　C^∞級関数
4　方向微分
5　ベクトル場
6　写像の微分
7　合成写像の微分

内容

- C^∞級写像の合成
- 合成写像の微分
- 曲線の速度ベクトルの定義
- 全微分の幾何学的解釈

Section 7.1　C^∞級写像の合成とその微分

目標
① 「C^∞級写像の合成はC^∞級写像」
② 「合成の全微分は全微分の合成」

設定　$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

各 $i = 1, 2, 3$ について　$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^{n_i}$

$\varphi : U_1 \to U_2$:
$\psi : U_2 \to U_3$:
C^∞級

目標①について

Theorem 7.1.1 : 合成写像

$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞級

図式：

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & U_2 \arrow[r, "\psi"] & U_3 \end{tikzcd}$$

以下，証明を紹介する．

少し準備

Lemma 7.1.2

$$(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$$

$$\text{as } C^\infty(U_3)\to C^\infty(U_1)$$

図式：

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] & U_2 \arrow[r, "\psi"] & U_3 \arrow[d, "f"] \\ & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(\psi\circ\varphi)^*(f) \qquad \psi^*(f)$$

$$\| $$

$$\varphi^*(\psi^*(f))$$

Proof of Theorem 7.1.1

示 $(\psi \circ \varphi)^*(C^\infty(U_3)) \subset C^\infty(U_1)$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U_3)$, $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

$f \in C^\infty(U_3)$ を任意にとる.

示 $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

ここで Lemma 7.1.2 より

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)^*(f) &= (\varphi^* \circ \psi^*)(f) \\
&= \varphi^*(\psi^*(f)).
\end{aligned}
$$

つづく

示 $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$.

いま ψ は C^∞ 級なので $\psi^*(f) \in C^\infty(U_2)$

φ も C^∞ 級なので $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$

$\blacksquare$

目標② について

Recall : $\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞ 級 (cf. Thm 7.1.1)

Theorem 7.1.3 (合成写像の全微分)

$p \in U_1$ を fix. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$$

図式 :

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} U_2 \xrightarrow{\psi} U_3$$

$$T_pU_1 \xrightarrow{(d\varphi)_p} T_{\varphi(p)}U_2 \xrightarrow{(d\psi)_{\varphi(p)}} T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$$

Proof of Theorem 7.1.3

(ii) $\left(d(\psi\circ\varphi)\right)_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$

as $T_pU_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

i.e. $\forall y \in T_pU_1$,

$$\left(d(\psi\circ\varphi)\right)_p(y) = \left((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p\right)(y)$$

as in $T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

$y \in T_pU_1$ を任意にとる.

示 $(d(\psi\circ\varphi))_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$

$$\text{(左辺)} = y\circ(\psi\circ\varphi)^*$$

$$= y\circ\varphi^*\circ\psi^* \quad (\because \text{Lemma 7.1.2})$$

$$= \underbrace{((d\varphi)_p(y))}_{\in T_{\varphi(p)}U_2}\circ\psi^*$$

$$= (d\psi)_{\varphi(p)}((d\varphi)_p(y))$$

$$= ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y) = \text{(右辺)}$$

∎

Cor 7.1.4 (cf. Thms 6.3.2 and 7.1.3)

$$\underbrace{(J(\psi\circ\varphi))_p}_{n_3\times n_1} = \underbrace{(J\psi)_{\varphi(p)}}_{n_3\times n_2}\cdot\underbrace{(J\varphi)_p}_{n_2\times n_1}$$

行列の積

（実はこれは連鎖律）

Section 7.1 終

Section 7.2：曲線の速度ベクトル

この節では曲線の速度ベクトルの定義を行う
（Section 7.3 の準備）

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$：空でない開集合

$(a, b) \subset \mathbb{R}$：開区間

$(-\infty \leq a < b \leq \infty)$

Def. 7.2.1: C^∞級写像 $c : (a,b) \to U$ のことを U 上の C^∞級曲線と呼ぶ

Def. 7.2.2: U 上の C^∞級曲線 $c : (a,b) \to U$, $t_0 \in (a,b)$ について

写像 $\dot{c}(t_0) : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ c)(t_0+h) - (f \circ c)(t_0)}{h} \quad = (f \circ c)'(t_0)$$

を c の t_0 における速度ベクトルと呼ぶ

記号：$U \subset \mathbb{R}^n$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ の記号を用い，

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ における

微分は $\frac{d}{dt}$ の記号を用いる．

Prop 7.2.3：$c : (a,b) \to U$: U 上の C^∞ 級曲線

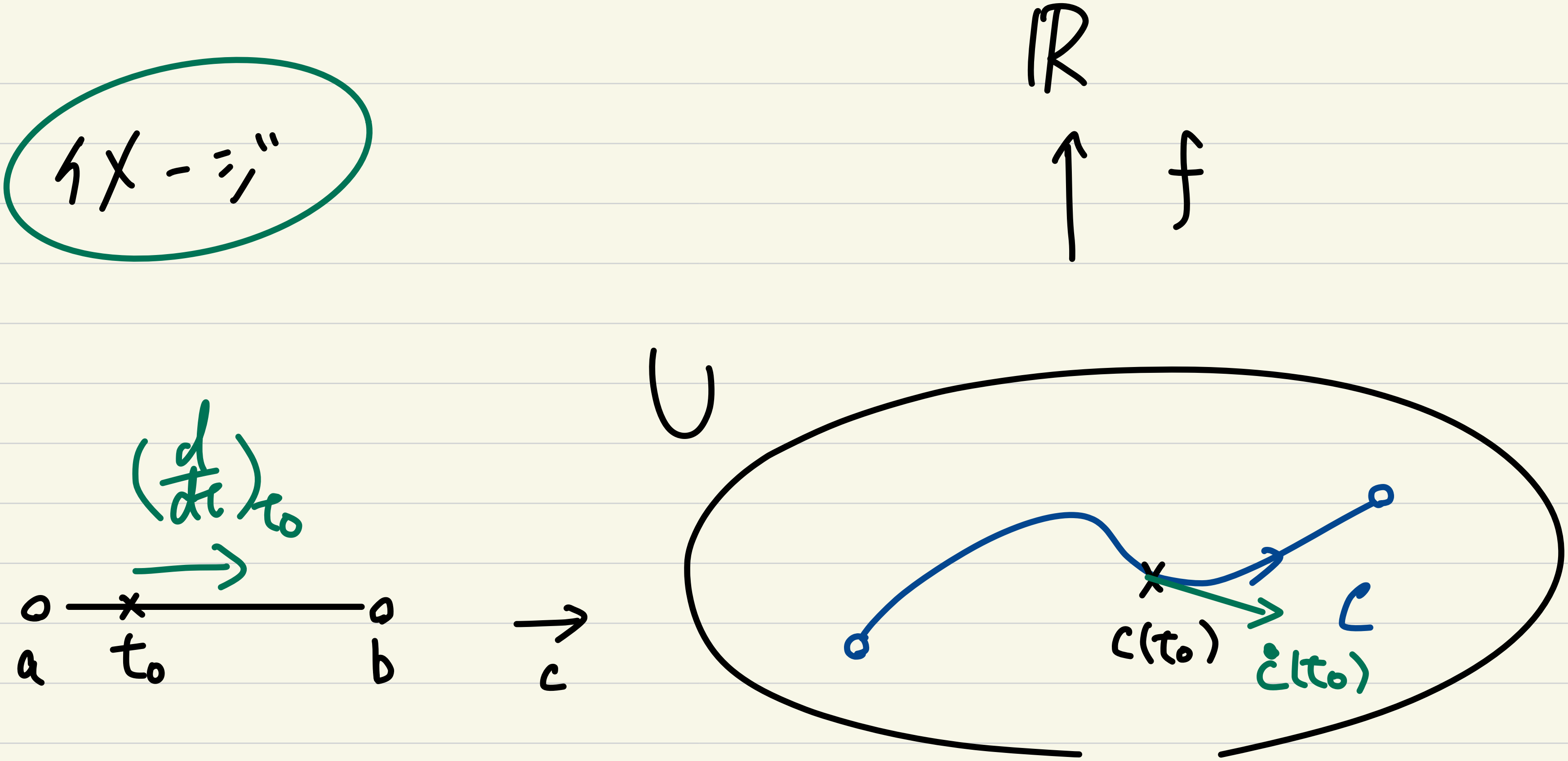
$t_0 \in (a,b)$ について，

$$\dot{c}(t_0) = \underbrace{(dc)_{t_0}}_{c\text{ の全微分}}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}U$$

速度ベクトルは接ベクトル

（定義そのもの）

イメージ



$(\dot{c}(t_0))(f)$ は時刻 t_0 において，
f の c に沿った変化率を見ている．

速度ベクトルの計算法

Prop 7.2.4 :

$c : (a,b) \to U \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (c_1(t), \cdots, c_n(t))$: U 上の C^∞ 級曲線

$t_0 \in (a,b)$ とする.

(Prop 6.1.3 より $c_1, \cdots, c_n \in C^\infty((a,b))$)

このとき

$$\dot{c}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t_0)}.$$

どんな接ベクトルもある曲線の速度ベクトルで書ける.

Prop 7.2.5 :

$p \in U$, $y \in T_pU$ とする.

このとき

${}^{\exists}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$: U 上の C^∞ 級曲線

s.t.

$c(0) = p$ かつ $\dot{c}(0) = y$

Hint : $y = \sum_{i=1}^{n} y(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ (Cor 4.5.7 または Lemma 6.3.4)

Section 7.2 終

Section 7.3：全微分の幾何学的解釈

この節では"曲線の対応"を通じて写像の微分を特徴付ける.

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$：C^∞級写像

$p \in U_1$

記号：$(d\varphi)_p : T_p U_1 \to T_{\varphi(p)} U_2,\ \gamma \mapsto \gamma \circ \varphi^*$

φ の p における全微分

曲線の対応

Prop 7.3.1 : $(a,b) \subset \mathbb{R}$: 空ではない開区間.

$c : (a,b) \to U_1$: U_1 上の C^∞ 級曲線とする.

このとき $\varphi \circ c : (a,b) \to U_2$ は

U_2 上の C^∞ 級曲線

Hint : Thm 7.1.1

記号：

$$\mathrm{Curve}(U_1;p) := \left\{ \begin{array}{l} U_1 \text{ 上の } C^\infty \text{級曲線} \\ c : (a,b) \to U_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} a < 0 < b \\ c(0) = p \end{array} \right\}$$

時刻 0 で点 p を通る U_1 上の曲線の集合

Recall：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Curve}(U_1;p) & \longrightarrow & T_pU_1 \\ c & \longmapsto & \dot{c}(0) \end{array} \quad \text{は全射}$$

(cf. Prop 7.2.5)

Prop 7.3.2 : $\forall c \in \mathrm{Curve}(U_1, p)$,

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(0)) = (\varphi \circ c)^{\bullet}(0) \quad \text{in } T_{\varphi(p)}U_2$$

Hint : Thm 7.1.3

全微分 $(d\varphi)_p$ は上の命題の性質で特徴付けられる.

Theorem 7.3.3.

写像 $\Xi : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ が

" $\forall c \in \mathrm{Curve}(U_1, p)$,

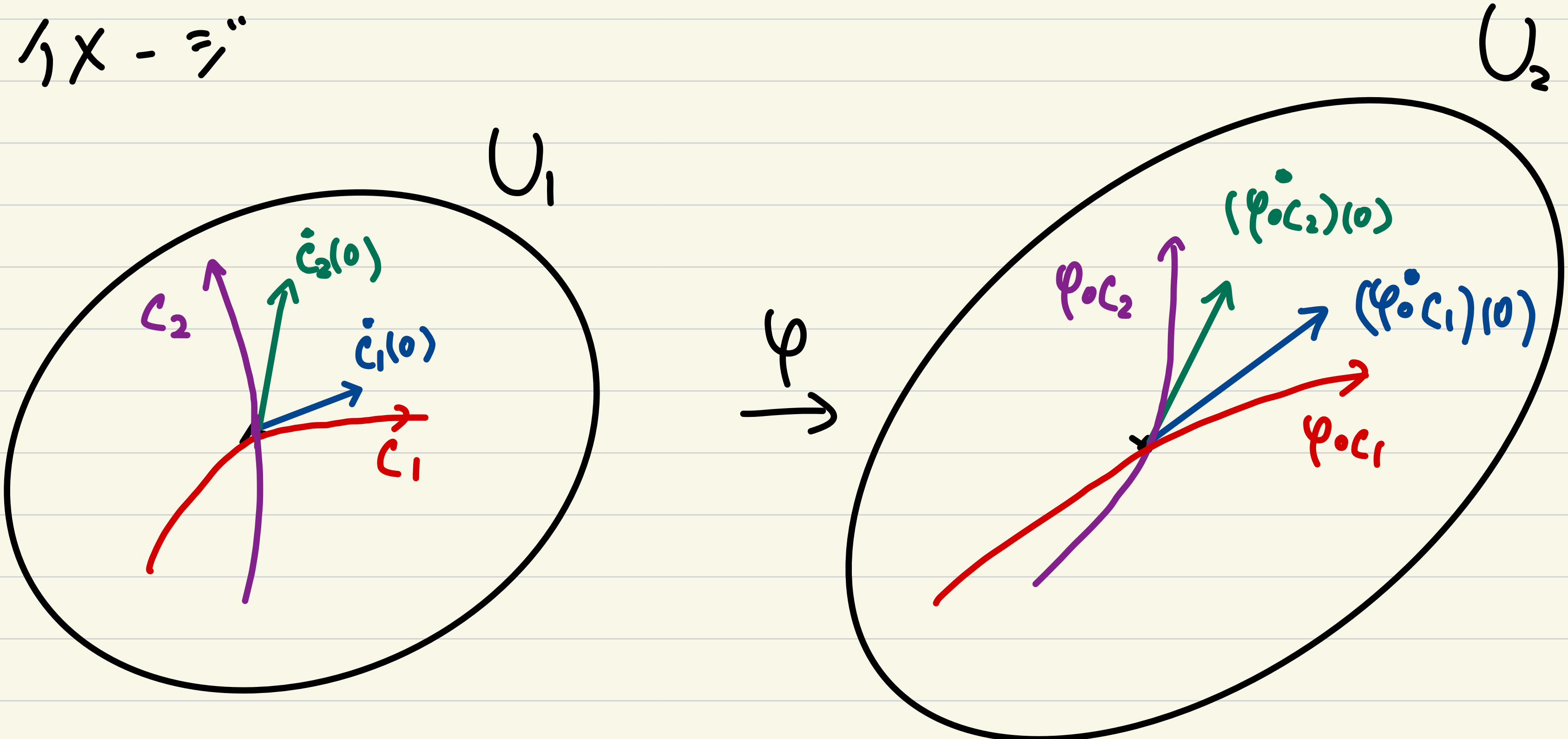
$$\Xi(\dot{c}(0)) = (\varphi \circ c)^{\bullet}(0) \text{ "}$$

を満たすなら $\Xi = (d\varphi)_p$

Hint : $\mathrm{Curve}(U_1 ; p) \to T_pU_1$ は全射

$$c \mapsto \dot{c}(0)$$

イメージ



$$
\begin{aligned}
\dot{c}_1(0) &\overset{(d\varphi)_p}{\longmapsto} (\varphi\circ c_1)^{\bullet}(0) \\
\dot{c}_2(0) &\longmapsto (\varphi\circ c_2)^{\bullet}(0)
\end{aligned}
$$

曲線の対応関係が分かれば

全微分 $(d\varphi)_p$ が計算できる場合である.

Ex 7.3.4:

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 2t^3)$$

$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t)$$

とする.

C^∞級写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が以下を満たすとする:

$$\varphi((0,0)) = (0,0,1)$$

$$\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, 2t, 1)$$

$$\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (0, 2t, t+1)$$

Claim : このとき $p=(0,0)$ とおくと

$$(d\varphi)_p\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right)$$

$$= a\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + 2(a+b)\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} + b\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)}$$

∵ $\dot{c}_1(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \qquad \dot{c}_2(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$

$$(\varphi\circ c_1)^{\bullet}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}, \quad (\varphi\circ c_2)^{\bullet}(0) = 2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)}$$

また $(d\varphi)_p$ の表現行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

特に $\operatorname{rank} (d\varphi)_p = \operatorname{rank} (J\varphi)_p = 2$.

Section 7.3 終