Section 8 : 局所座標系

意義 : 位相空間上の局所座標系を定義する.

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 8 : 局所座標系 ★

9 : 座標変換

10 : 可微分多様体

11 : 正則局所座標系

12 : 部分多様体

13 : C^∞級関数の構成

内容

- 位相空間論の各種命題
- 局所座標系の定義
- 関数の局所座標上の C^∞ 性

Section 8.1：位相空間論の各種命題

今後よく使う位相空間論の命題を整理しておく.

設定

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$：位相空間

相対位相の復習

Def 8.1.1: 各部分集合 $A \subset X$ について

$$\mathcal{O}_X(A) := \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}$$
$$(\subset \mathcal{P}(A))$$

を $\mathcal{O}_X$ の定める A の相対位相とよぶ

Prop 8.1.2: A を X の部分集合とし

包含写像を $\iota : A \hookrightarrow X$ とおく.

このとき $\mathcal{O}_X(A)$ は

"ι を連続とするような最弱な位相".

Prop 8.1.3: $B \subset A \subset X$ とする.

このとき

$$\mathcal{O}_X(B) = (\mathcal{O}_X(A))(B)$$

相対位相の相対位相は相対位相

Prop 8.1.4: $U \in \mathcal{O}_X$ (i.e. U は X の開集合) とする.

部分集合 $V \subset U$ について以下は同値

(i) $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (V は open in U)

$\Updownarrow$

(ii) $V \in \mathcal{O}_X$ (V は open in X)

Remark: U が X の開集合でない場合は同様の命題は成り立たない.

($V = U$ とすると反例になる)

同相写像についての復習

Prop 8.1.5

$\phi : X \to Y$: 全単射連続写像とする.

以下は同値

(i) ϕ は同相 (i.e. $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続)

(ii) ϕ は開写像 (i.e. ${}^\forall U \in \mathcal{O}_X,\ \phi(U) \in \mathcal{O}_Y$)

Prop 8.1.6: $A \subset X$, $B \subset Y$ とし、

相対位相 $\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ により A, B をそれぞれ位相空間とみなす。

(1) $\varphi : X \to Y$ を連続写像であって

$\varphi(A) \subset B$ となるものとする。

φ は A から B への写像としても連続。

(2) $\varphi : X \to Y$ を同相写像であって、

$\varphi(A) = B$ となるものとする。

Section 8.1 終

φ は A から B への写像としても同相。

Section 8.2：局所座標系の定義

位相空間上の局所座標系の定義を述べる.

設定：$M = (M, \mathcal{O}_M)$：空でない位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def. 8.2.1（局所座標系）

$\underset{\neq \emptyset}{O} \underset{\text{open}}{\subset} M \quad \underset{\neq \emptyset}{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし,

相対位相により位相空間とみなす.

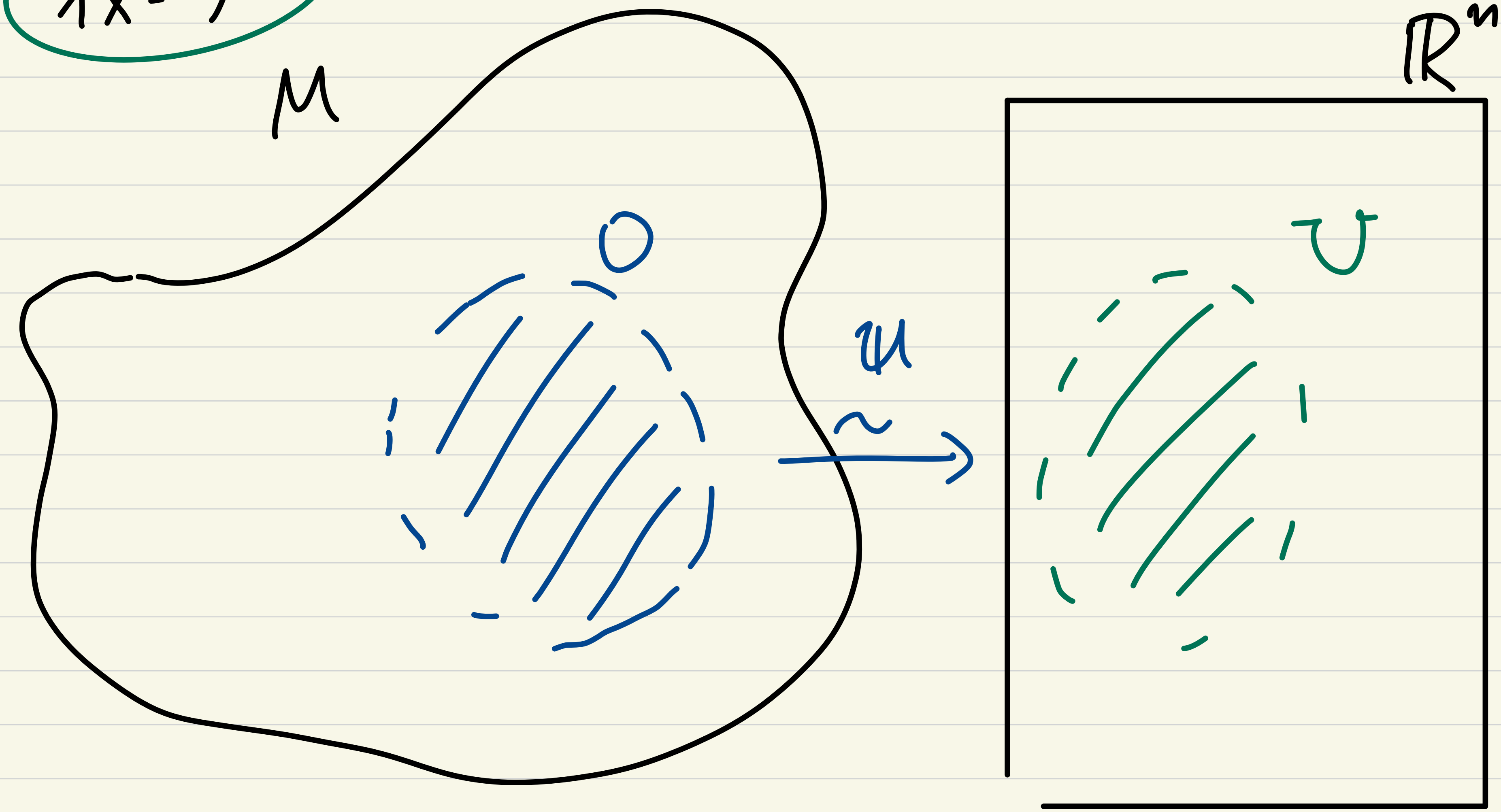
また $u : O \to U$ を同相写像とする.

このとき

組 (O, U, u) を M の n 次元局所座標系とよぶ.

また u を O 上の n 次元局所座標とよぶ.

イメージ



O の"地図"

すぐ後で例を紹介するよ.

以下の記号を準備しておく.

Def. 8.2.2

$$LC(M;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, \varphi) \mid M \text{ の } n \text{ 次元局所座標系}\}$$

Local coordinate

local coordinate system

(この講義の独自記号なので注意)

Ex 8.2.2 (自明な例)

$$M = \underset{\underset{\emptyset}{\shortparallel\!\!\!\!\!/}}{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \text{ とする}$$

$$(\underset{\underset{M}{\shortparallel}}{U}, U, \mathrm{id}_U) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$$

Ex 8.23 (球面上の局所座標系)

open ではない

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、

$$S^n := \{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく。

相対位相により S^n を位相空間とみなす。

(連結、コンパクト、ハウスドルフ)

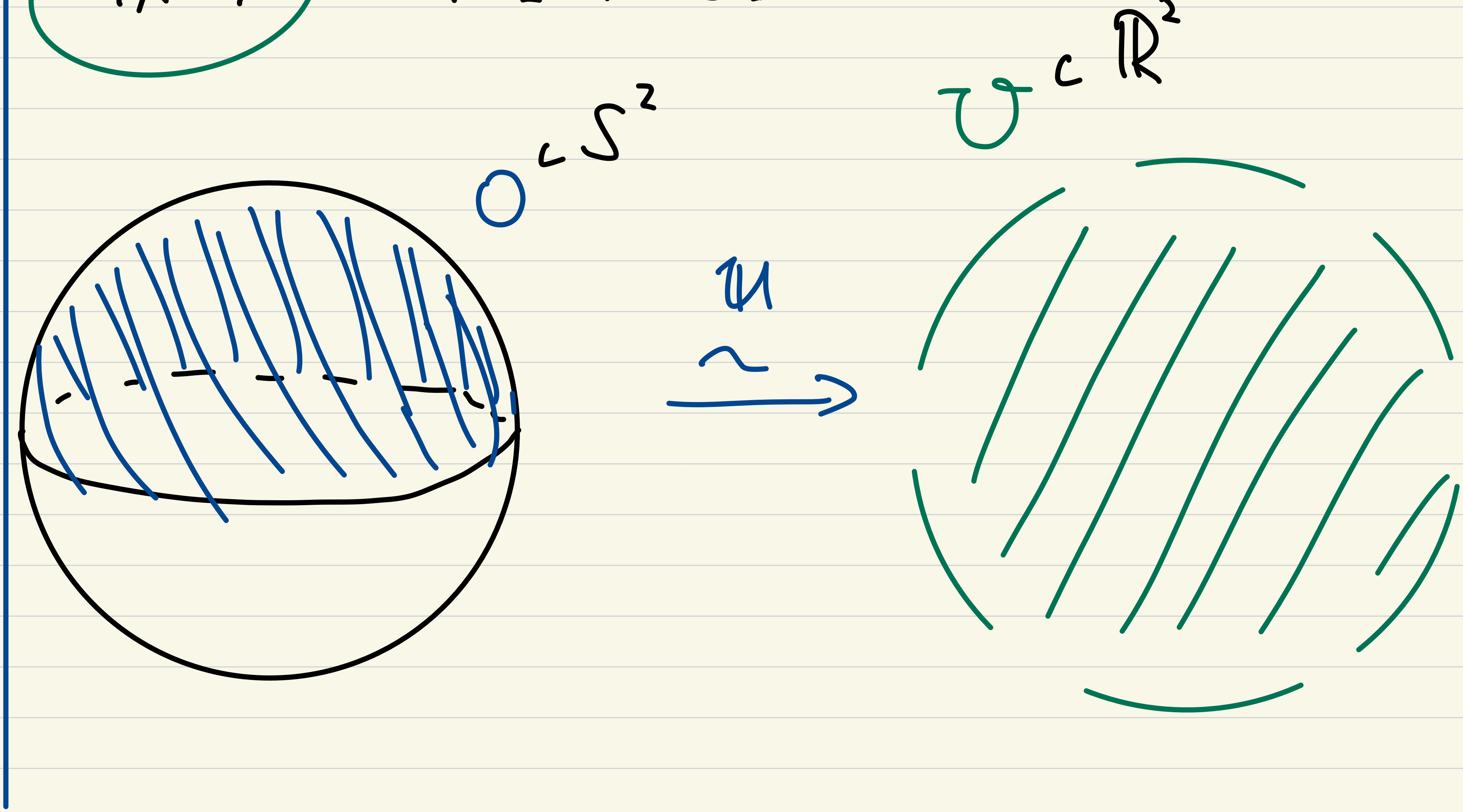
$$O := \{ x \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} \subset S^n$$

$$U := \{ u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$

とし、

$$\mathcal{U} : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$$ とおく。

イメージ　$n=2$ の場合



Claim : $(O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$

Proof : 示 ① $O \neq \emptyset$, $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$

② $U \neq \emptyset$, $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

③ $\mathfrak{u} : O \to U$ は well-defined で同相写像

値域に注意

① を示す：

示 $O \neq \emptyset$, $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$.

$(0, 0, \cdots, 0, 1) \in O$ より $O \neq \emptyset$

$$O = S^n \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}}_{\text{open in } \mathbb{R}^n}$$

より O : open in S^n

(① 証明終)

② を示す:

(示) $U \neq \emptyset$, $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$.

$(0, \cdots, 0) \in U$ より $U \neq \emptyset$.

多項式関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$

は $\mathbb{R}$ 上連続であり,

$U = f^{-1}((-\infty, 1))$ $\left((-\infty, 1) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \right)$

より U は open in $\mathbb{R}^n$

(② 証明終)

③を示す：

示 A $u: O \to U,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ は well-defined
B u は同相写像

Ⓐを示す.

示 $\forall x \in O,\ (x_1, \cdots, x_n) \in U$

$x \in O$ を任意にとる.

示 $(x_1, \cdots, x_n) \in U$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$

$x \in O$ より $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ かつ $x_{n+1} > 0$.

従って $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 < 1$ （Ⓐ証明終）

(B) を示す：

$\phi : U \to O,\ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto (u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2})$

とおく。

以下を示せばよい

(示) ① ϕ は well-defined.

② ϕ は $\mathcal{U}$ の逆写像 (i.e. $\phi \circ \mathcal{U} = id_O$ かつ $\mathcal{U} \circ \phi = id_U$)

(ハ) $\mathcal{U}$ は連続

(ニ) ϕ は連続

イ を示す：

値が定まることを確認

示 $\forall u \in U$, $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ かつ

値域の元であることを確認

$\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O$.

$u \in U$ を任意にとる.

U の定義から $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1$ より $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$.

示 $\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O$.

i.e. $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2 = 1$

$$\text{左辺} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

$$= 1 = \text{右辺}$$

（①証明終）

口を示す：

示 i $\phi \circ \psi = id_O$

ii $\psi \circ \phi = id_U$

i を示す：

$x \in O$ を任意にとる.

示す $(\phi \circ \psi)(x) = x$

左辺 $= \phi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2})$

ここで $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, $x_{n+1} > 0$ ($x \in O$) に注意すると

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

よって 左辺 $= (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = x =$ 右辺.

(i 証明終)

ii を示す: $u \in U$ を任意にとる.

示1 $u \circ \phi(u) = u$

左辺 $= u\left(u_1, \cdots u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

$= (u_1, \cdots, u_n) = u$ = 右辺

(ⅰ 証明終)

(ロ 証明終)

(1) を示す:

(示) $u : O \to U$ は連続

以下を示せば十分 ($\because$ Prop 8.1.1 & 8.1.6 (1))

(示) $^\exists \tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$: 連続 s.t. $\tilde{u}|_O = u$

$\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とする

各成分が連続関数(多項式関数)

なので $\tilde{u}$ は連続 ($\because$ Prop 6.1.6)

また定義から $\tilde{u}|_O = u$

((1) 証明終)

㊁を示す：

(示) $\phi : U \to O$ は連続 ($O \subset \mathbb{R}^{n+1}$)

以下を示せば十分（∵ Prop 8.1.6 (1)）

(示) ϕ は $\mathbb{R}^{n+1}$ への写像として連続

$$\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1},\ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

とおくと各成分が連続（最後の成分は Ex 3.2.4）

なので ϕ も連続（∵ Prop 8.1.6）

（㊁ 証明終）（Ⓑ 証明終）（③ 証明終）

$\blacksquare$

次の命題は今後よく使う

Prop 8.2.4

$(O, U, \psi) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

また $\emptyset \neq O_0 \subset_{\text{open}} O$ を fix.

このとき

$$\left(O_0,\ \psi(O_0),\ \psi|_{O_0} : O_0 \to \psi(O_0)\right) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$$

Proof of Prop 8.2.4

示

① $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$

② $u(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

③ $u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ は同相写像

①を示す

示） $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$.

$O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ と $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ より

$O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$ （$\because$ Prop 8.1.4）

（①証明終）

②を示す

㊡ $x(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

いま $x: O \to U$ は同相写像なので,

特に開写像 ($\because$ Prop 8.1.5)

従って $x(O_0) \subset U$: open ($\because O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$)

いま $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ なので $x(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ($\because$ Prop 8.1.4)

(②証明終)

③を示す：(示) $u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ は同相写像

Mからの相対位相（O_0）　$\mathbb{R}^n$からの相対位相（$u(O_0)$）

O_0の位相はOからの相対位相とみなしてよく、

$u(O_0)$の位相はUからの相対位相とみなしてよい

($\because$ Prop 8.1.3)

いま $u : O \to U$ は同相写像なので

$u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ も同相写像

($\because$ Prop 8.1.6 (2))

(③証明終)

∎

言葉の定義

Def 8.2.5 :

$p \in M$, $(O, U, u) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

$p \in O$ となるとき

(O, U, u) を p のまわりの

n次元局所座標系とよぶ

Ex 8.2.6 : Ex 8.2.3 において

$p = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in S^n$ とおくと

(O, U, u) は p のまわりの n次元局所座標系

Section 8.2 終

Section 8.3：関数の局所座標上のC^∞性

設定：

M：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

記号：

$C(M)$：M上の連続関数全体のなす$\mathbb{R}$代数

(cf. Ex 2.2.3)

Remark: "$C^\infty(M)$" の定義はまだない.

"(O, U, u) 上の C^∞ 性" を以下で定義する.

Def. 8.3.1: $f \in C(M)$ が

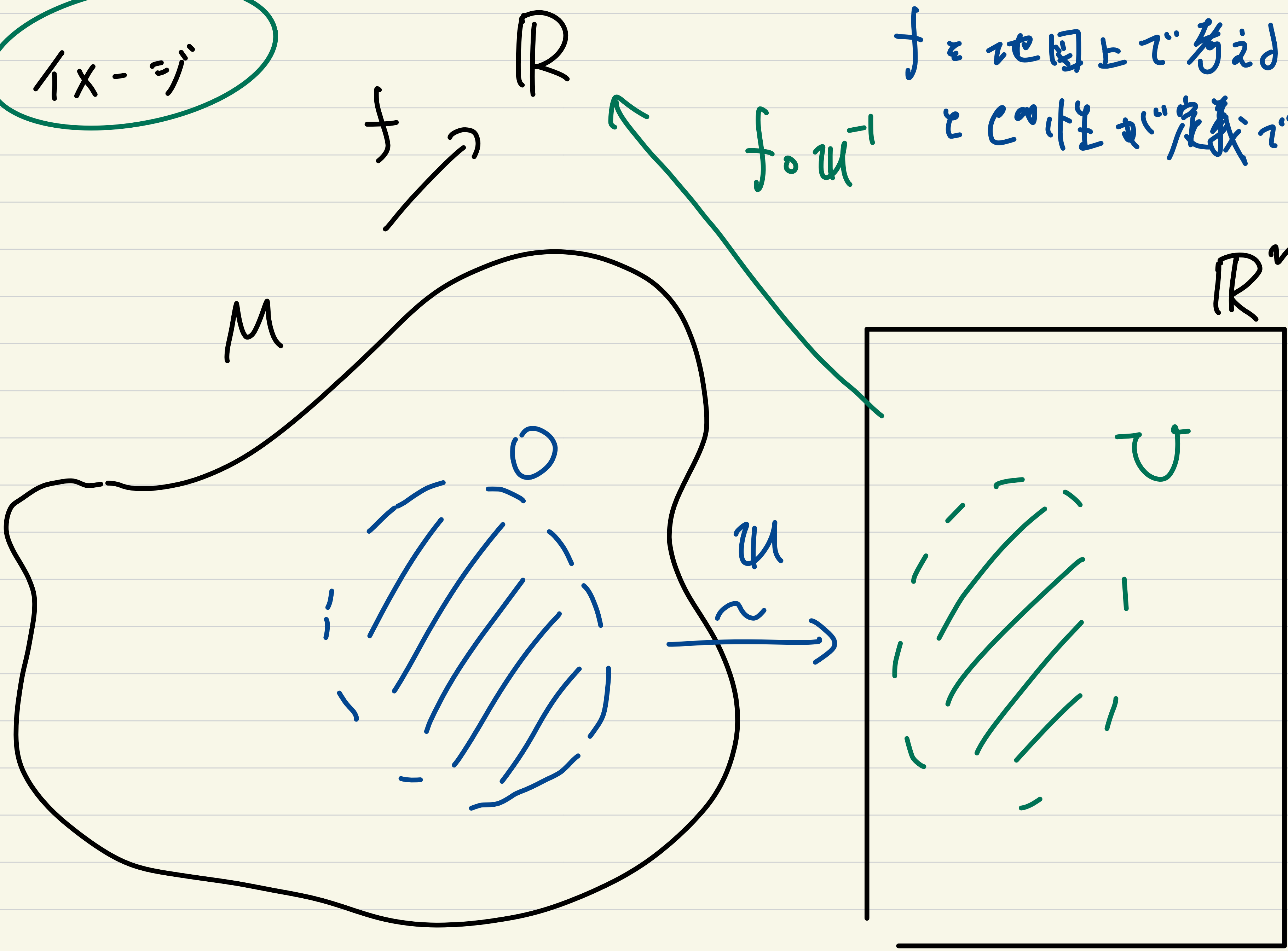
(O, U, u) 上 C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\iff} \quad f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

(この講義の独自の用語なので注意)

イメージ



f を地図上で考える
f∘u^{-1} と C^∞ 性が定義できる.

記号の準備

Def. 8.3.2

$$C^\infty(M;(O,U,u)) := \{ f \in C(M) \mid f \text{ は } (O,U,u) \text{ 上 } C^\infty \text{級} \}$$

Prop 8.3.3

$C^\infty(M;(O,U,u))$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

Ex 8.3.4 : Ex 8.2.3 の設定で考える.

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{とおく.}$$
$$\quad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad\qquad$$
$$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \longmapsto x_{n+1}$$

Claim : $f \in C^\infty(S^n ; (O, U, u))$

㊟ ① $f : M \to \mathbb{R}$ は連続

② $f \circ u^{-1} : U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数

$\mathbb{R}^n \overset{\text{open}}{\supset}$

①を示す: $\hat{f}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$ は連続

いま $\hat{f}|_{S^n} = f$ より f も連続

$(\because$ Prop 8.1.6 (1) $)$

②を示す:

$$u^{-1}: U \to O,\ u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

に注意すると

$$f \circ u^{-1}: U \to \mathbb{R},\ u \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

これは C^∞ 級 $(\because$ Ex 3.2.4 $)$ 図

Section 8.3 終