Section 9 : 座標変換と C^∞-atlas

意義：局所座標系の間の"変換"を定義する。
　　また"整合性のある地図帳"として C^∞-atlas を定義する。

Part II ： 可微分多様体の定義，各種構成

Section 8 ： 局所座標系
　　　　9 ： 座標変換
　　　　10 ： 可微分多様体
　　　　11 ： 多様体の例
　　　　12 ： C^∞ 級関数の構成

多様体論の難所：① 接空間

② C^∞級写像とその微分

新しい視点なので難しい

（もうやった）

地図同士の整合性 → ③ 座標変換

"完全版"地図帳 → ④ 極大 atlas

ややこしいだけ（副読本のみ）

内容

- 座標変換の定義
- 座標変換の C^∞ 性
- C^∞-atlas と C^∞ 級関数

地図帳

Section 9.1: 座標変換の定義

この節では座標変換の定義を述べる.

設定: M: 空でない位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u), (O', V, v) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$

with $O \cap O' \neq \emptyset$

記号

$LC(M; \mathbb{R}^n)$: M の n 次元局所座標系全体の集合

$$u(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$ に注意.

Def. 9.1.1 : "2枚の地図を見比べる"

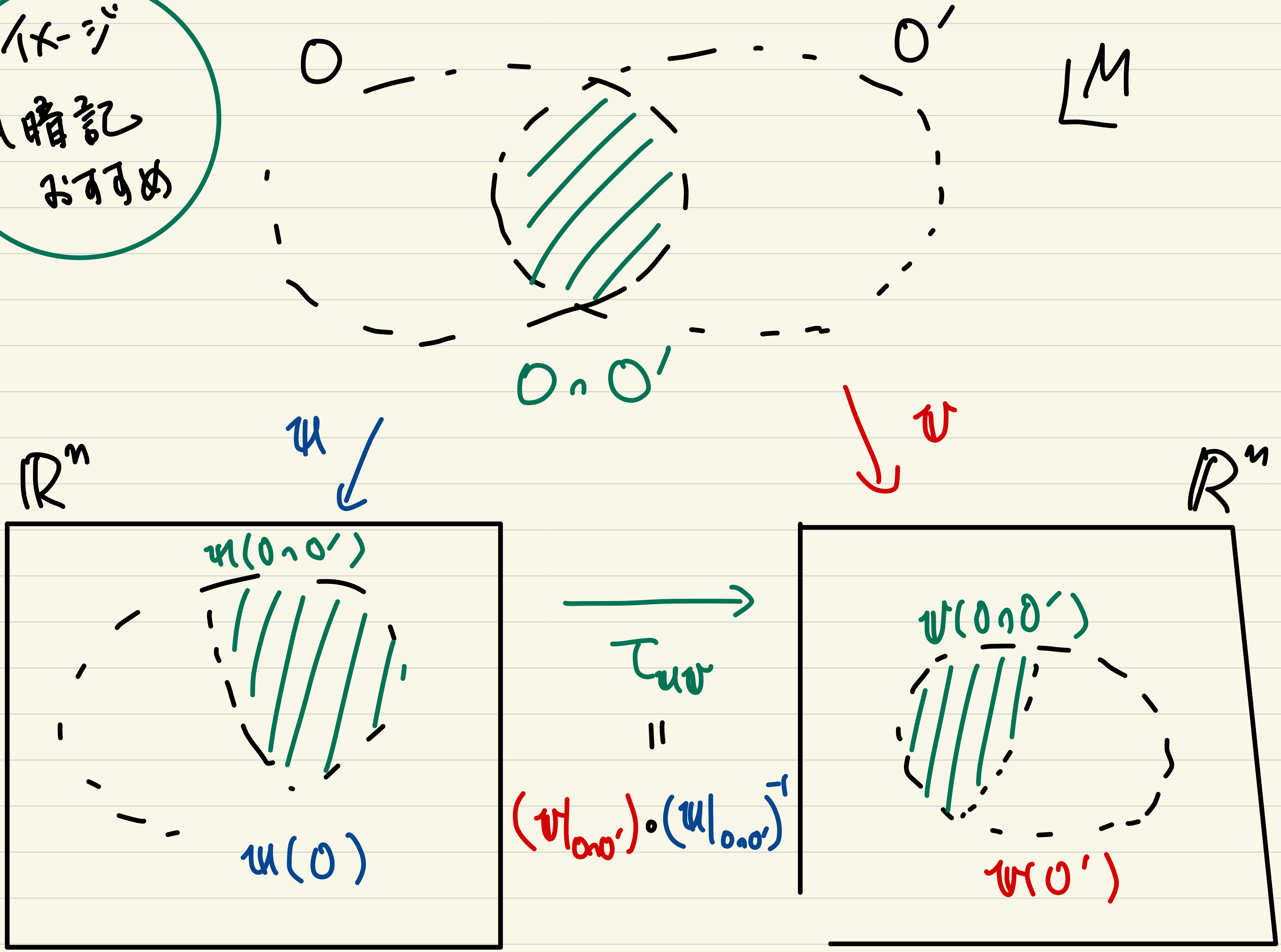
$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u \longmapsto v(u^{-1}(u))$$

$$\left(\text{i.e. } \tau_{uv} = v|_{O \cap O'} \circ (u|_{O \cap O'})^{-1} \right)$$

を (O, U, u) から (O', V, v) への座標変換という.

イメージ
丸暗記
おすすめ



Ex 9.1.2 : $n=2$, $S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$.

$O := \{ x \in S^2 \mid x_3 > 0 \}$

$U := \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{LC}(S^2; \mathbb{R}^2)$

$\mathfrak{u} : O \to U$, $x \mapsto (x_1, x_2)$ (cf. Ex 8.2.3)

$(\mathfrak{u}^{-1} : U \to O$, $u \mapsto (u_1, u_2, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\,)$

$O' := \{ x \in S^2 \mid x_2 > 0 \}$

$V := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O', V, \mathfrak{v}) \in \mathcal{LC}(S^2; \mathbb{R}^2)$

$\mathfrak{v} : O' \to V$, $x \mapsto (x_1, x_3)$

$(\mathfrak{v}^{-1} : V \to O'$, $v \mapsto (v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}, v_2)\,)$

$$u(O\cap O') \xleftarrow{u} O\cap O' \xrightarrow{v} v(O\cap O')$$

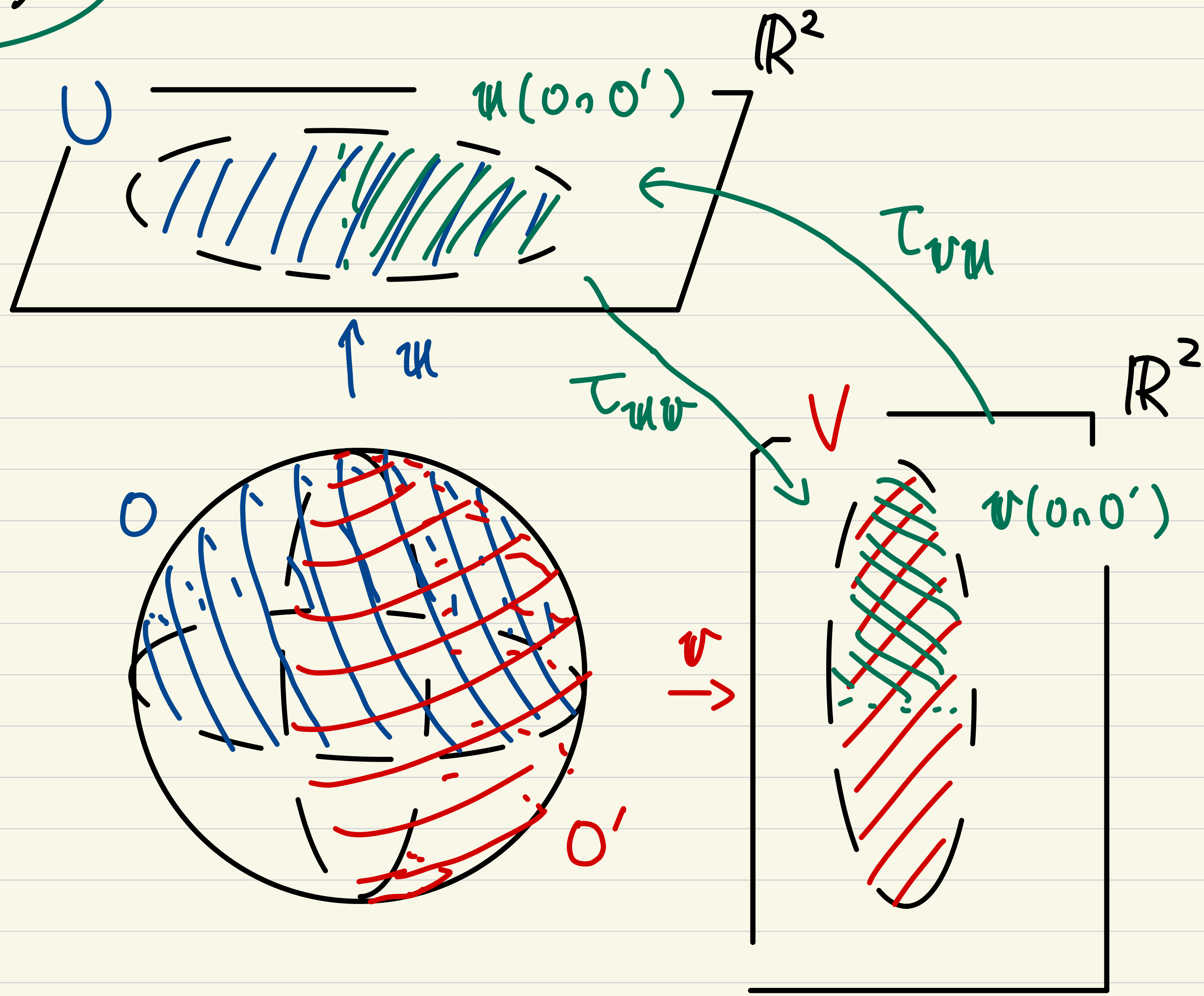
$$\{u\in U \mid u_2>0\} = u(O\cap O'), \quad O\cap O' = \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\}, \quad v(O\cap O') = \{v\in V \mid v_2>0\}$$

$$\mathbb{R}^2 \overset{\text{open}}{\supset} U \overset{\text{open}}{\supset} \{u\in U \mid u_2>0\}, \qquad \{v\in V \mid v_2>0\} \overset{\text{open}}{\subset} V \subset \mathbb{R}^2$$

$$\tau_{uv}: u \longmapsto v(u^{-1}(u)) = \left(u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\right)$$

$$\tau_{vu}: v \longmapsto u(v^{-1}(v)) = \left(v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}\right)$$

イメージ



よく使う命題をいくつか述べておく.

Prop 9.1.3 : (O, U, u) から (O, U, u) への座標変換 (← 自明)

$\tau_{uu} : u(O) \to u(O)$ は恒等写像

Prop 9.1.4 :

(O, U, u) から (O', V, v) への座標変換

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O'),\ u \mapsto v(u^{-1}(u))$

と (O', V, v) から (O, U, u) への座標変換

$\tau_{vu} : v(O \cap O') \to u(O \cap O'),\ v \mapsto u(v^{-1}(v))$

は互いに逆写像

Prop 9.1.5: $(O_i, U_i, u_i) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ $(i=1,2,3)$ とし、

$O_1 \cap O_2 \cap O_3 \neq \emptyset$ とする。

このとき

$u_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ から $u_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ への写像として

$$\tau_{u_1 u_3}\big|_{u_1(O_1\cap O_2\cap O_3)} =$$

$$\left(\tau_{u_2 u_3}\big|_{u_2(O_1\cap O_2\cap O_3)}\right) \circ \left(\tau_{u_1 u_2}\big|_{u_1(O_1\cap O_2\cap O_3)}\right)$$

Section 9.1 終

Section 9.2：座標変換の C^∞ 性

設定：

M：空でない位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u), (O', V, v) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$

with $O \cap O' \neq \emptyset$

記号

T_{uv}：(O, U, u) から (O', V, v) への座標変換

T_{vu}：(O', V, v) から (O, U, u) への座標変換

Q : 座標変換

$$\tau_{UV} : \underset{\subset_{\text{open}}\,\mathbb{R}^n}{U(O\cap O')} \to \underset{\subset_{\text{open}}\,\mathbb{R}^n}{V(O\cap O')}$$

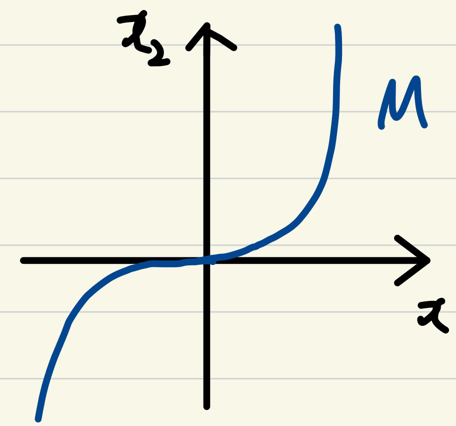
$$\tau_{VU} : \underset{\subset_{\text{open}}\,\mathbb{R}^n}{V(O\cap O')} \to \underset{\subset_{\text{open}}\,\mathbb{R}^n}{U(O\cap O')}$$

は共に C^∞ 級写像 かい ?

A : No !

Ex 9.2.1 :

$M := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2$ とする.



$O := M$

$U := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $(O, U, u) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R})$

$u : O \to U, \ x \mapsto x_1$ (同相)

$(u^{-1} : U \to O, \ u \mapsto (u, u^3))$

$O' := M$

$V := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $(O', V, v) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R})$

$v : O' \to V, \ x \mapsto x_2$ (同相)

$(v^{-1} : V \to O', \ v \mapsto (v^{1/3}, v))$

このとき

$$O \cap O' = M, \quad u(O \cap O') = \mathbb{R}, \quad v(O \cap O') = \mathbb{R}$$

である

$$\tau_{uv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto v(u^{-1}(u)) = u^3$$

$$\tau_{vu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto u(v^{-1}(v)) = v^{\frac{1}{3}}$$

$\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級ではない

（原点で微分不可能）

講義全体を通じたキーポイント：

座標変換が C^∞ 級写像だとうれしい!!

Recall:

$(O \cap O', u(O \cap O'), u|_{O \cap O'} : O \cap O' \to u(O \cap O'))$
$\in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

かつ

$(O \cap O', v(O \cap O'), v|_{O \cap O'} : O \cap O' \to v(O \cap O'))$
$\in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

(cf. Prop. 8.2.4)

座標変換が C^∞ 級写像だとうれしい理由

Theorem 9.2.2 :

座標変換 $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$
$\tau_{vu} : v(O\cap O') \to u(O\cap O')$
が共に C^∞ 級写像であるとする.

このとき $f \in C(M)$ について次は同値

(i) $f \in C^\infty(M;(O\cap O', u(O\cap O'), u|_{O\cap O'}))$

$\Updownarrow$

(ii) $f \in C^\infty(M;(O\cap O', v(O\cap O'), v|_{O\cap O'}))$

"f の C^∞ 性の定義" が $O\cap O'$ 上で一致

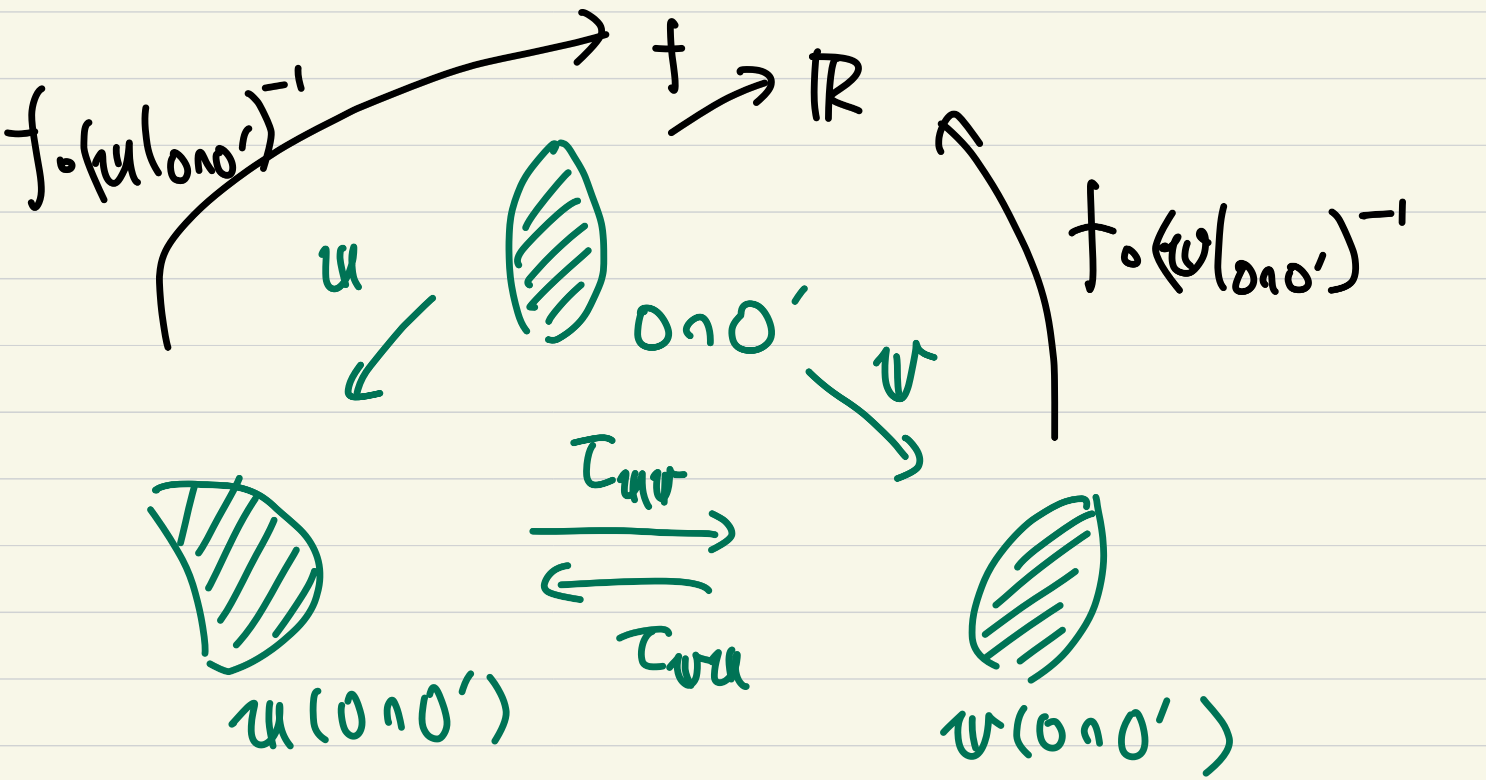
証明の準備

Lemma 9.2.3

← 引き戻し

$$f \circ (v|_{O\cap O'})^{-1} = \tau_{vu}^{*}\left(f\circ (u|_{O\cap O'})^{-1} \right)$$

$$f \circ (u|_{O\cap O'})^{-1} = \tau_{uv}^{*}\left(f\circ (v|_{O\cap O'})^{-1} \right)$$



Proof of Thm 9.2.2 : (i) ⇒ (ii) について.

(i) を仮定する. (ii) を示そう.

(示) $f \circ (\boldsymbol{v}|_{O \cap O'})^{-1} \in C^{\infty}(\boldsymbol{v}(O \cap O'))$.

いま Lemma 9.2.3 より

$$f \circ (\boldsymbol{v}|_{O \cap O'})^{-1} = \tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}^{*}\left(f \circ (\boldsymbol{u}|_{O \cap O'})^{-1} \right).$$

(示) $\tau_{\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}}^{*}\left(f \circ (\boldsymbol{u}|_{O \cap O'})^{-1} \right) \in C^{\infty}(\boldsymbol{v}(O \cap O'))$.

← 設定

ここで τ_{vu} は C^∞級写像 なので

(i) より $f \circ (u|_{O \cap O'})^{-1} \in C^\infty(u(O \cap O'))$.

従って $\tau_{vu}^* (f \circ (u|_{O \cap O'})^{-1}) \in C^\infty(v(O \cap O'))$.

これで (i) ⇒ (ii) が示された.

(ii) ⇒ (i) についても同様.

∎

Ex 9.2.4 : Ex 9.1.2 の設定で考える.

$$\begin{array}{ccccc}
u(O\cap O') & \xleftarrow{u} & O\cap O' & \xrightarrow{v} & v(O\cap O') \\
\| & & \| & & \| \\
\left\{ u\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} u_1^2+u_2^2<1 \\ u_2>0 \end{matrix} \right\} & & \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\} & & \left\{ v\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} v_1^2+v_2^2<1 \\ v_2>0 \end{matrix} \right\} \\
\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^2 & & & & \text{open} \subset \mathbb{R}^2
\end{array}$$

$\mathbb{R}^3$の開集合ではない

座標変換

$$T_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O'),\quad u \mapsto \left(u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\right)$$

$$T_{vu} : v(O\cap O') \to u(O\cap O'),\quad v \mapsto \left(v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}\right)$$

はどちらも C^∞ 級

(cf. Ex 3.2.4, Prop 6.1.3 : 定義域に注意)

特に Thm 9.2.2 より

任意の $f \in C(S^2)$ について

$$f \in C^\infty(S^2; (O\cap O', u(O\cap O'), u|_{O\cap O'}))$$

$$\iff f \in C^\infty(S^2; (O\cap O', v(O\cap O'), v|_{O\cap O'}))$$

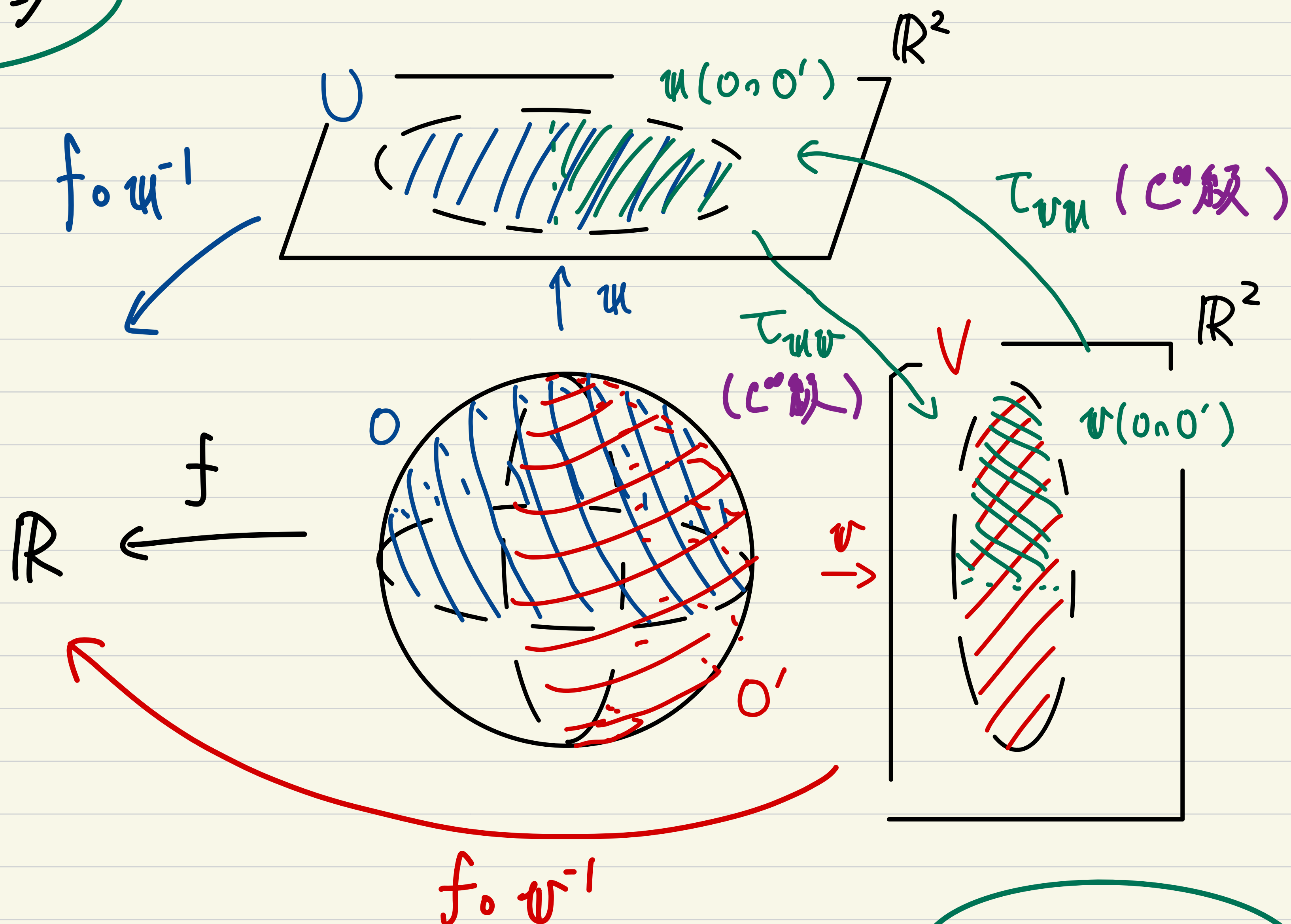
"f は $O\cap O'$ において C^∞ 級" に 2種類の意味があるが

① 地図 u で考える

② 地図 v で考える

実は同値である.

イメージ



Section 9.2 終

Section 9.3 C^∞-atlas と C^∞級関数

この節では C^∞-atlas (地図帳) と，
その上の C^∞級関数を定義する．

設定： M：空でない位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号： $LC(M;\mathbb{R}^n)$：M の n 次元局所座標系全体の集合

Def. 9.3.1

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が M の C^∞-atlas

地図帳

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① $\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = M$

Mのすべての地点をカバー

かつ

② ${}^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v) \in \mathcal{A}_0$

with $O \cap O' \neq \emptyset$,

座標変換

$\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

$u \mapsto v(u^{-1}(u))$

地図同士の整合性がとれている

は C^∞級写像

（すぐ後で例を紹介する）

C^∞-atlas 上の C^∞ 級関数を以下で定義

Def. 9.3.2：$\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする.

$f \in C(M)$ が $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級

$$\overset{\text{}}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \quad {}^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0 ,\ f \in C^\infty(M ; (O, U, u))$$

また $C^\infty(M ; \mathcal{A}_0) := \{ f \in C(M) \mid f \text{ は } \mathcal{A}_0 \text{ 上 } C^\infty \text{ 級} \}$

とおく.

$$\left(\text{i.e. } C^\infty(M ; \mathcal{A}_0) := \bigcap_{(O, U, u) \in \mathcal{A}_0} C^\infty(M ; (O, U, u)) \right)$$

関数 f の連続性についての Remark

Prop 9.3.3 : $f : M \to \mathbb{R}$ (i.e. $f \in \mathbb{R}^M$) について

以下は同値　　　連続性を仮定しない

(i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$.

$\Updownarrow$

(ii) $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$.

非自明なのは "(ii) $\Rightarrow$ f は連続"

Hint：次の位相空間論の命題を用いる.

Lemma 9.3.4

X, Y を位相空間とし,

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする.

また $f : X \to Y$ を写像とする.

次は同値

(i) $f : X \to Y$ は連続

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ は連続

次の命題は重要：

Prop 9.3.5：$\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする.

このとき $C^\infty(M;\mathcal{A}_0)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

Hint：Prop 8.3.3, Prop 2.2.4

これを定義したかった！

(次の Section でもう少し細かい話をする)

Ex 9.3.6 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$ とする.

各 $k = 1, \cdots, n+1$ について

$O_k^+ := \{ x \in S^n \mid x_k > 0 \}$

$U_k^+ := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \}$

$\mu_k^+ : O_i^+ \to U_i^+ ,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$

$\left((\mu_k^+)^{-1} : U_i^+ \to O_i^+ ,\ u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k-1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_k, \cdots, u_n\right) \right)$

とおくと $(O_k^+, U_k^+, \mu_k^+) \in LC(S^n; \mathbb{R}^n)$

また 各 $k=1,\cdots,n+1$ について

$O_k^- := \{ x \in S^n \mid x_k < 0 \}$

$U_k^- := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \}$

$\varphi_k^- : O_i^- \to U_i^-, \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$

$\left((\varphi_k^-)^{-1} : U_i^- \to O_i^-, \quad u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k-1}, -\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_k, \cdots, u_n\right) \right)$

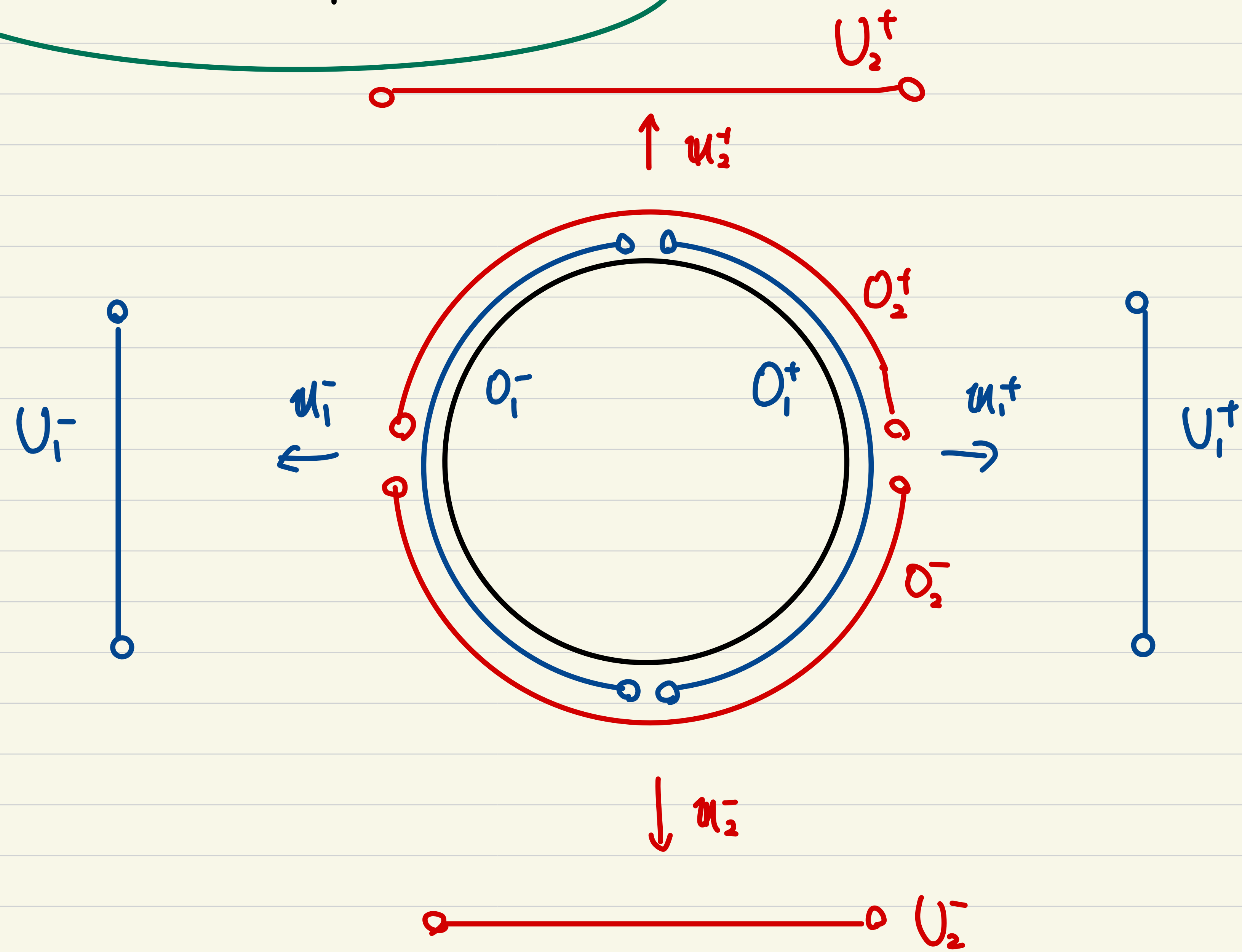
とおくと $(O_k^-, U_k^-, \varphi_k^-) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$

ここで

$$\mathcal{A}_0 := \{ (O_k^+, U_k^+, \varphi_k^+) \mid k = 1, \cdots, n+1 \} \cup \{ (O_k^-, U_k^-, \varphi_k^-) \mid k = 1, \cdots, n+1 \} \subset \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$$

とおく.

イメージ : $n=1$ の場合



Claim: $\mathcal{A}_0$ は S^n の C^∞-atlas

Proof

示

① $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = S^n$

② $\mathcal{A}_0$ 内の座標変換が C^∞ 級写像

①について： $\bigcup_{(O,U,u)\in A_0} O \subset S^n$ は明らか

以下を示せばよい

示 $\bigcup_{(O,U,u)\in A_0} O \supset S^n$

i.e. $\forall x \in S^n, \exists (O,U,u)\in A_0, x\in O$

$\forall x \in S^n$ をとる. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ より $\exists k=1,\cdots,n+1, x_k \neq 0$

$x_k > 0$ のとき $x \in O_k^+ \quad ((O_k^+, U_k^+, u_k^+)\in A_0)$

$x_k < 0$ のとき $x \in O_k^- \quad ((O_k^-, U_k^-, u_k^-)\in A_0)$

(① 証明終)

② について：

示. ${}^\forall(O, U, u), {}^\forall(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞ 級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ with $O \cap O' \neq \emptyset$ を任意にとる.

$(O, U, u) = (O', V, v)$ の場合は

座標変換 $\tau_{uu} : u(O) \to u(O)$

は 恒等写像 (cf. Prop 9.1.2) となり, 特に C^∞ 級写像

$(O, U, u) \neq (O', V, v)$ の場合を考える.

$k_1, k_2 = 1, \cdots, n+1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = +$ or $-$ とし,

$$(O, U, u) = (O_{k_1}^{\varepsilon_1}, U_{k_1}^{\varepsilon_1}, u_{k_1}^{\varepsilon_1})$$
$$(O', V, v) = (O_{k_2}^{\varepsilon_2}, U_{k_2}^{\varepsilon_2}, u_{k_2}^{\varepsilon_2})$$
とおく.

$(O, U, u) \neq (O', V, v)$ かつ $O \cap O' \neq \emptyset$ より

$k_1 \neq k_2$ となることに注意する.

Case 1 : $k_1 < k_2$ のとき

定義に従って計算すると

記号の乱用

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_1 x_{k_1} > 0,\ \varepsilon_2 x_{k_2} > 0 \}$$

注意

$$u(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ \varepsilon_2 u_{k_2-1} > 0 \}$$

$$v(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1,\ \varepsilon_1 v_{k_1} > 0 \}$$

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_1-1}, \varepsilon_1 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_{k_1}, \cdots u_{k_2-2}, u_{k_2}, \cdots, u_n\right)$$

これは C^∞級写像 (cf. Prop 6.1.3 & Ex 3.2.4)

Case 2 : $k_1 > k_2$ のとき

定義に従って計算すると

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_2 x_{k_2} > 0, \varepsilon_1 x_{k_1} > 0 \}$$

$$u(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1, \varepsilon_2 u_{k_2} > 0 \}$$

$$v(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i^2 < 1, \varepsilon_1 v_{k_1 - 1} > 0 \}$$

注意

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u \longmapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_2-1}, u_{k_2+1}, \cdots u_{k_1-1}, \varepsilon_2 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n u_i^2}, u_{k_1}, \cdots, u_n \right)$$

これは C^∞ 級写像 (cf. Prop 6.1.3 & Ex 3.2.4)

証

Claim: $f: S^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$ は A_0 上 C^∞ 級

Proof: $f \in C(S^n)$ となることは Ex 8.3.4 でみた

以下を示せばよい

示 $^\forall (O, U, u) \in A_0,\ f \in C^\infty(S^n; (O, U, u))$.

$(O, U, u) \in A_0$ を任意にとる.

示 $f \in C^\infty(S^n; (O, U, u))$ i.e. $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$

A_0 の定義から

$$(O, U, u) = (O_k^\varepsilon, U_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)$$

(ただし $k = 1, \cdots, n+1,\ \varepsilon = +$ or $-$) と書ける.

ここで $U_k^\varepsilon = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1, \varepsilon u_k > 0 \}$

また $(\psi_k^\varepsilon)^{-1}$ の形に注意して計算すると

$k = 1, \cdots, n$ のとき

$$f \circ (\psi_k^\varepsilon)^{-1} : U_k^\varepsilon \to \mathbb{R},\ u \mapsto u_n$$

$k = n+1$ のとき

$$f \circ (\psi_{n+1}^\varepsilon)^{-1} : U_{n+1}^\varepsilon \to \mathbb{R},\ u \mapsto \varepsilon \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n u_i^2}$$

これは U_k^ε 上 C^∞ 級 (cf. Ex 3.2.4) 図

Ex 9.3.6 では S^n（n次元球面）に

C^∞-atlas $\mathcal{A}_0$ であって $\#\mathcal{A}_0 = 2n+2$ となるものを

構成した。

地図帳　　　地図の枚数

Q1：地図を1枚にできないか？

（$\#\mathcal{A}_0 = 1$ となる S^n の C^∞-atlas は存在する？）

A1：不可能（証明は簡単ではない）

Q2：地図の枚数を減らせないか？

A2：2枚にはできる

（Section 10 で紹介）

Section 9.3 終