

2020 年前期 幾何学 A 演習問題 No.1 問 1–問 14 (6/17 配布分)

中レポート課題は問 4, 問 5, 問 13. 中レポート提出締め切りは 6/24.

キーワード: \mathbb{R} 代数

問 1. ベクトル空間 \mathbb{R}^2 を考える. 以下の写像 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ のうち双線型であるものをすべて選べ. またそれらが双線型であること, それ以外が双線型でないことをそれぞれ示せ:

(1) $\nu: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

(2) $\mu: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 x_2, y_1 y_2)$.

(3) $\xi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (y_2, x_1)$.

問 2. ベクトル空間 \mathbb{R} は通常の“実数の積”について \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義 Example 2.1.3). 実数の積についての分配則などは認めてよい.

問 3. S を集合, W を実ベクトル空間とする. W 値関数のなす空間 $W^S := \{f: S \rightarrow W\}$ は“関数の和”と“関数のスカラー倍”の構造により実ベクトル空間となることを示せ (講義 Proposition 2.1.4).

問 4. (重要:中レポート) S を集合とする. 実ベクトル空間 \mathbb{R}^S は“各点ごとの積”について \mathbb{R} 代数となることを示せ (講義 Example 2.1.5).

問 5. (重要:中レポート) V, W を実ベクトル空間とする. このとき $\mathcal{L}(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ は線型}\}$ は W^V の線型部分空間であることを示せ (講義 Proposition 2.1.6).

問 6. V を実ベクトル空間とする. $\text{End}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ とおく. 実ベクトル空間 $\text{End}(V)$ は写像の合成に関して \mathbb{R} 代数となることを示せ. (講義 Example 2.1.7).

問 7. 「部分 \mathbb{R} 代数は \mathbb{R} 代数である」を定式化し証明せよ (講義 Proposition 2.2.2).

問 8. 次の三つの写像が連続であることをそれぞれ示せ:

(1) $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$.

(2) $\nu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

(3) $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x$.

ただし $\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R} (= \mathbb{R}^2)$ は標準位相によりそれぞれ位相空間とみなすものとする.

問 9. S を位相空間とする. $C(S) := \{f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ は \mathbb{R}^S の部分 \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義 Example 2.2.3; Hint 問 9).

問 10. (V, \cdot) を \mathbb{R} 代数とし, $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を V の部分 \mathbb{R} 代数の族とする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ は (V, \cdot) の部分 \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義 Proposition 2.2.4).

問 11. (重要度:低) S を位相空間とする. $C_c(S) := \{f \in C(S) \mid \text{supp } f \text{ は compact}\}$ は $C(S)$ の部分 \mathbb{R} 代数であることを示せ (講義 Example 2.2.5).

問 12. S を集合, $p \in S$ とする. このとき

$$\text{ev}_p: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$$

は \mathbb{R} 代数準同型であることを示せ (講義 Example 2.2.7).

問 13. (重要:中レポート) S_1, S_2 をそれぞれ位相空間とし, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ を連続写像とする. このとき φ による引き戻し

$$\varphi^*: C(S_2) \rightarrow C(S_1), f \mapsto f \circ \varphi$$

は \mathbb{R} 代数準同型であることを示せ. (講義 Example 2.2.8).

問 14. (V, \cdot) を \mathbb{R} 代数とする. V 上の二項演算 $[\ , \]$ (bracket 積) を

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$$

と定める. 以下を示せ (講義 Example 2.3.5).

(1) $(V, [\ , \])$ は \mathbb{R} 代数.

(2) V が結合的であるとする. このとき, 任意の $a, b, c \in V$ について以下 (Jacobi 律) が成り立つ:

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]].$$